차 례

머리말 3

제1장. 모임 4
제1절. 모임의 의미와 표시 5
제2절. 부분모임과 나머지모임 13
제3절. 모임의 사귐과 합 18
복습문제 23

제2장. 비와 비례 25
제1절. 비와 비례식 26
제2절. 비례관계와 거꿀비례관계 37
제3절. 비례관계와 거꿀비례관계의 그라프 46
복습문제 56

제3장. 1차방정식과 1차안같기식 59
제1절. 1차식 $y=ax+b$의 그라프 60
제2절. 1차방정식 63
제3절. 1차안같기식 67
복습문제 70

제4장. 원 72
제1절. 원둘레와 원 73
제2절. 원둘레와 직선, 원과 원의 자리관계 81
제3절. 원기둥과 구 94
복습문제 98

제5장. 련립1차방정식과 련립1차안같기식 100
제1절. 방정식과 안같기식의 변형 101
제2절. 련립방정식의 의미 107
제3절. 련립두변수1차방정식의 풀이법 111
제4절. 련립세변수1차방정식의 풀이법 116
제5절. 련립방정식 세우기 119
제6절. 련립한변수1차안같기식 122
복습문제 131

제6장. 면적 134
제1절. 다각형의 면적 135
제2절. 원둘레의 길이와 원의 면적 148
복습문제 154

제7장. 여러마디식의 곱하기와 인수분해 157
제1절. 지수법칙 158
제2절. 여러마디식의 곱하기 165
제3절. 인수분해 170
제4절. 곱하기공식과 인수분해공식 176
복습문제 189

제8장. 닮은 도형과 구부린 도형 192
제1절. 3각형에서의 비례선분 193
제2절. 닮은 도형 196
제3절. 구부린 도형 201
복습문제 205

제9장. 공간도형 207
제1절. 공간에서 직선과 평면 208
제2절. 다면체 219
제3절. 회전체 225
제4절. 립체의 겉면적과 체적 229
복습문제 247

제10장. 경우의 수와 자료다루기 252
제1절. 경우의 수 253
제2절. 자료다루기 261
복습문제 276

찾아보기 279

상 식

자리표법의 창시자 데까르뜨 50
우리 나라 수학자 홍대용 152
고조선시기의 직각자 —《구》 200
4천년전에 계산한 바른각뿔의 체적 240

머 리 말

위대한 령도자 **김정일**대원수님께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 됩니다. 수학교육을 강화하는것은 자라나는 새 세대들의 과학적인 사고능력을 키워주는데서 중요한 의의를 가집니다.》

정보산업시대, 과학과 기술의 시대인 오늘 수학의 지식과 방법을 모르고서는 현대과학과 기술을 배울수도 없고 발전시킬수도 없다. 바로 그렇기때문에 수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 된다.

수학은 반만년의 가장 오랜 력사를 가진 과학이다.

시대의 변천에 따르는 사람들의 생활과 실천의 요구로부터 수와 도형에 관한 단편적인 지식의 축적으로 발생한 수학은 오늘날 모든 과학과 기술의 기초로 되는 현대수학으로까지 발전하여왔다.

지금 수학은 3대과학분야인 수학과학, 자연과학, 사회과학의 한 부문으로 되고있다.

수학은 사색을 요구하는 창조적인 과학이다. 수학을 잘 배워 그 방법을 잘 익히면 머리가 트이고 모든 사물현상을 조리있게 보고 판단하는 힘이 생기며 과학적인 사고능력을 키울수 있다.

아무리 복잡한 수학공식이나 원리라고 하여도 자기 머리로 사고하고 처음부터 리치를 차근차근 따져가면 그것을 확고하게 습득할수 있다. 또한 깊은 지식을 습득하고 수학적지능을 키워나가면 아무리 복잡한 문제라도 쉽게 풀수 있으며 새로운 공식도 발견할수 있다.

2학년 수학에서는 앞으로의 학습의 기초로 되는 모임을 먼저 주고 간단한 방정식과 안갈기식, 여러마디식, 간단한 평면도형들과 공간도형들의 기초지식과 그것들을 다루는 방법들을 배운다.

우리는 자기 땅에 발을 붙이고 눈은 세계를 보며 조선을 위하여 배우고 또 배워 선군의 내 나라를 과학과 기술로 빛내여나가는 훌륭한 인재가 되기 위하여 적극 노력하여야 한다.

제1장. 모 임

$A=\{x \mid x<5\}$

모임의 의미와 표시

부분모임과 나머지모임

모임의 사귐과 합

$A, B, C, \ldots, X, Y, \ldots$

$a, b, c, \ldots, x, y, \ldots$

제1절. 모임의 의미와 표시

1. 모임의 의미

지금까지 모임이라는 말을 많이 써왔다.

례를 들어

1) 우리 학급 축구선수들의 모임

2) 2등변3각형들의 모임

3) −3과 5사이에 있는 옹근수들의 모임

4) 짝수들의 모임

웃례에서 1)은 축구선수들을 대상으로 하여 《우리 학급의 축구선수》라는 조건에 맞는 선수들을 모아 생각한것이다.

2)는 3각형들을 대상으로 하여 《2등변3각형》이라는 조건에 맞는 3각형들을 모아 생각한것이다.

> 일정한 조건에 맞는 대상들을 모으면 모임이 된다.
>
> 모임을 이루는 하나하나의 대상을 그 모임의 원소라고 부른다. 그리고 원소는 모임에 든다 또는 모임은 원소를 가진다라고 말한다.

문 제

1. 우의 례에서 모임 3), 4)는 각각 어떤 조건에 맞는 대상들을 하나로 모아 생각한것인가? 그 원소들을 불러보아라.

2. 1) 짝수와 홀수는 옹근수들의 모임에 각각 드는가?

   2) 바른3각형은 2등변3각형들의 모임에 드는가?

   3) 9는 −2와 3사이에 있는 옹근수들의 모임에 드는가?

알아보기 다음과 같은 말로 모임을 정할수 있는가?

1) 직4각형들　　2) 12의 약수들

3) 4의 배수들　　4) 우리 나라의 높은 산들

《우리 나라의 높은 산들》이라고 하면 높이가 얼마나 되는 산을 높은 산이라고 말하겠는가 하는것이 명백하지 않으므로 이러한 말로는 모임을 정할수 없다.

수학에서 모임이라고 하면 무엇이든지 그 모임에 드는가 안드는가 하는 조건이 명백해야 한다.

문 제

1. 모임의 례를 3개 들어라.
2. 모임을 정할수 없는 례를 2개 들어라.

수나 도형을 서로 다른 글자로 표시하여 구별하는것과 마찬가지로 모임도 서로 다른 큰 글자

$$A,\ B,\ C,\ \cdots,\ X,\ Y,\ \cdots$$

등으로 표시하고 그 원소는 작은 글자

$$a,\ b,\ c,\ \cdots,\ x,\ y,\ \cdots$$

등으로 표시하여 구별한다.

a가 모임 A의 원소라는것을 다음과 같이 표시한다.

$$a \in A \text{ 또는 } A \ni a$$

b가 모임 A의 원소가 아니라는것을 다음과 같이 표시한다.

$$b \notin A \text{ 또는 } A \not\ni b$$

문 제

다음것이 옳은가?

1) −3과 4사이의 옹근수들의 모임을 A로 표시할 때

$$-2 \notin A,\ 5 \in A,\ 0 \notin A,\ \frac{1}{2} \notin A,\ -\frac{2}{3} \notin A,\ -2.5 \in A$$

2) 분자와 분모의 합이 5인 분수들의 모임을 B로 표시할 때

$$\frac{1}{2} \in B,\ \frac{2}{3} \in B,\ \frac{1}{4} \in B,\ \frac{5}{1} \notin B$$

2. 모임의 표시

1. 다음 모임의 원소들을 괄호 { } 안에 다 써넣어라.
   1) 요일들의 모임
   2) 마지막수자가 3이고 70보다 작은 두자리수들의 모임
2. 다음 모임에서 점 《…》은 어떤 원소들을 표시하는가?
   1) A= {10, 12, 14, …, 18, 20}
   2) B= {4, 8, 12, 16, …}

모임의 원소들을 다 부를수 있으면 이것들을 모두 괄호 { } 안에 써넣어서 그 모임을 표시한다.

모임의 원소들을 다 쓰지 않아도 알수 있으면 몇개의 원소만을 { } 안에 써넣고 나머지는 《…》으로 표시한다.

문 제

괄호 { } 를 써서 다음 모임들을 표시하여라.

1) 우리 나라의 도소재지들의 모임
2) 16의 약수들의 모임
3) 홀수들의 모임
4) 4의 배수들의 모임
5) −50보다 크고 1 000보다 작은 5의 배수들의 모임

모임은 조건을 밝혀서도 표시한다.

례. A= $\{x \mid x$는 3의 배수$\}$

또는

A= $\{x \mid x=3n$, n은 옹근수$\}$

문 제

1. 조건을 밝히는 방법으로 다음 모임들을 표시하여라.

   1) 월요일시간표에 들어있는 과목들의 모임

   2) 50보다 작은 씨수들의 모임

   3) $A=\{6, 12, 18, 24, \cdots\}$

   4) $B=\{11, 13, 15, \cdots, 999\}$

2. 조건을 밝히는 방법으로 다음 모임들을 표시하여라.

   1) 분자와 분모의 합이 n(자연수)이고 정수인 분수들의 모임

   2) -3과 2사이에 있는 수들의 모임

   3) 하나의 자리의 수자와 열의 자리의 수자가 같은 두자리수들의 모임

수들의 모임은 수축에 표시할수도 있다.

례 1) $A=\{x \mid 5<x<9\}$, $B=\{x \mid -8\leq x\leq 12\}$

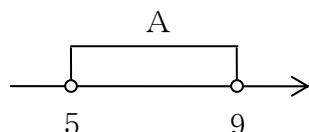
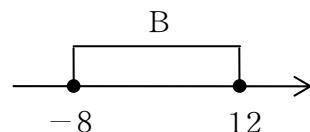



그림 1—1 그림 1—2

2) $A=\{x \mid x>3\}$, $B=\{x \mid x\geq a\}$

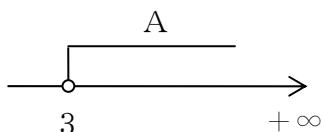
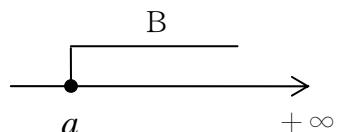



그림 1—3 그림 1—4

웃례에서와 같은 수모임은 수학에서 많이 다루므로 구간이라는 이름을 달고 다음 표에서와 같이 표시한다.

구간의 종류			
모 임	이 름	구간표시	수축표시
$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	닫긴구간	$[a, b]$	a b
$\{x \mid a < x < b\}$	열린구간	(a, b)	a b
$\{x \mid a < x \leq b\}$	반열린구간	$(a, b]$	a b
$\{x \mid x > a\}$	반무한구간	$(a, +\infty)$	a $+\infty$
$\{x \mid x \leq b\}$	반무한구간	$(-\infty, b]$	$-\infty$ b
$\{x \mid x$는 수$\}$	무한구간	$(-\infty, +\infty)$	$-\infty$ $+\infty$
$+\infty$: 《플루스 무한대》 $-\infty$: 《미누스 무한대》			

(주의) $+\infty$: 아무리 큰 수를 내놓아도 그보다 크다는것을 나타내는 기호
$-\infty$: 아무리 작은 수를 내놓아도 그보다 작다는것을 나타내는 기호

문 제

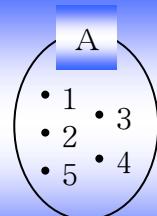
1. 수모임 $[a, b)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$들을 조건을 밝혀 표시하여라.
2. 다음 수모임들을 구간으로 표시하여라. 또 수축에 표시하여라.
   1) $\{x \mid -1 \leq x < 5\}$
   2) $\{x \mid -0.5 < x \leq 1.5\}$
   3) $\{x \mid x > -2\}$
   4) $\{x \mid x \leq -3\}$
3. 모임 $\{x \mid 0 < x < 1\}$ 과 $\{a \mid 0 < a < 1\}$ 은 같은 모임인가 다른 모임인가?

해보기 아래의 모임들을 다음의 다문곡선아낙의 점으로 표시하여라.
1) B= $\{1, 2, 3, \cdots, 9, 0\}$
2) C= {수학, 콤퓨터, 영어}

그림 1－5

모임의 원소들을 다문곡선안의 점들로 표시하면 편리할 때가 많다.

례: 모임 A＝｛1, 2, 3, 4, 5｝를 그림과 같이 표시한다.

이러한 그림을 모임그림(또는 벤도)이라고 부른다.

문 제

1. 다음 모임들을 모임그림으로 표시하여라.
   1) A＝｛가, 나, 다, 라, 마, 바｝
   2) B＝$\{a, b, c, x, y, z\}$
2. 괄호 ｛ ｝를 써서 다음 모임들을 표시하여라.

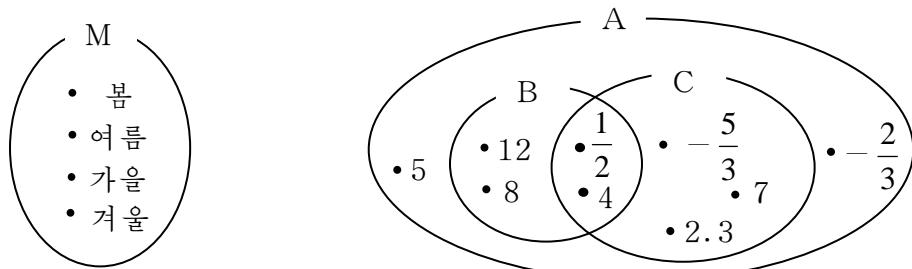



그림 1－6

3. 유한모임과 무한모임

해보기 1. 괄호 ｛ ｝를 써서 다음 모임들을 표시하여라.
   1) 11보다 작은 자연수들의 모임

2) 11보다 큰 옹근수들의 모임

이 모임들은 각각 몇개의 원소로 이루어졌는가?

2. 다음 모임은 원소의 개수를 정할수 있는가?

1) **김일성**경기장에서 축구경기를 보고있는 사람들의 모임

2) 평양시안의 중학교 학생전부의 모임

3) 옹근수전부의 모임

4) 100 000의 약수들의 모임

5) 5의 배수들의 모임

원소의 개수가 유한인 모임을 유한모임이라고 부르고 유한모임이 아닌 모임을 무한모임이라고 부른다.

문 제

다음 모임가운데서 유한모임과 무한모임을 갈라내여라.

1) 12의 약수들의 모임

2) **김일성**광장에서 진행된 군중대회에 참가한 사람들의 모임

3) 수학문제집에 있는 문제들의 모임

4) $0<x<1$인 x의 값들의 모임

5) 지구우에 살고있는 사람들의 모임

6) 분자와 분모의 합이 1 000인 분수들의 모임

7) 반경이 5cm보다 작은 원들의 모임

해보기 다음 모임의 원소들을 다 불러보아라.

1) 11보다 작은 두자리자연수들의 모임

2) 100보다 큰 100의 약수들의 모임

3) 0보다 크거나 작은 수들의 모임

4) 방정식 $3x-1=0$의 옹근수풀이들의 모임

5) 아낙각이 5개인 4각형들의 모임

수학에서는 하나의 대상을 놓고도 모임이라는 말을 쓰며 지어는 아무것도 없을 때에도 모임이라는 말을 쓴다.

하나의 원소도 안가지는 모임을 빈모임이라고 부르고 $\varnothing$으로 표시한다. 빈모임은 유한모임으로 본다.

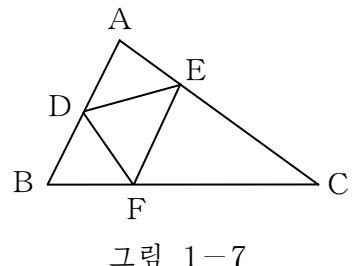
문 제

1. 다음 모임들가운데서 한 원소만으로 된 모임과 빈모임을 갈라내여라.
   1) -1과 1사이에 있는 옹근수들의 모임
   2) 우리 학급의 최우등생, 우등생들의 모임
   3) 우리 학급의 남학생들의 모임
   4) 서로 사귀는 두 직선의 사귐점들의 모임
   5) 방정식 $|x|+1=0$의 풀이모임
2. 다음 모임가운데서 빈모임을 찾아내여라.
   1) $\{x \mid x^2<0\}$　　2) $\{x \mid (x+1)^2 \geq 0\}$
   3) 정수도 부수도 아닌 수들의 모임
   4) 3개의 약수를 가지는 씨수들의 모임

련 습 문 제

1. 다음과 같은 말로 모임을 정할수 있는가?
   1) 2학년 수학교과서 8페지에 있는 글자들
   2) 계획을 넘쳐 수행한 협동농장들
   3) 키가 큰 학생들　　4) 24와 16의 공통약수들
   5) 방정식 $x=1$의 풀이들　　6) 바른3각형들
2. 다음 물음에 대답하여라.
   1) 평행4변형은 4각형들의 모임에 드는가?
   2) 직3각형은 바른3각형들의 모임에 드는가?
3. 괄호 { }를 써서 다음 모임들을 표시하여라.
   1) 짝수인 한자리자연수들의 모임
   2) 그림 1-7에 들어있는 3각형들의 모임
   3) 20과 40사이에 들어있는 씨수들의 모임
   4) 직4각형 ABCD의 정점들의 모임

그림 1-7

4. 조건을 밝히는 방법으로 다음 모임들을 표시하여라.
   1) $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14\}$　　2) $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$
   3) $\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \cdots,\ 99,\ 102\}$　　4) $\{2,\ 12,\ 22,\ 32,\ \cdots\}$
   5) {1월, 2월, 3월, …, 12월}

5. 다음 모임가운데서 유한모임과 무한모임을 갈라내여라.

1) 세자리자연수들의 모임　　2) 분자가 분모보다 작은 분수들의 모임

3) 바른3각형들의 모임　　4) 원둘레에 있는 점들의 모임

6. 다음것이 옳은가를 말하여라.

1) 3각형 $\in$ $\{x \mid x$는 다각형$\}$　　2) $3 \in \{x \mid x$는 2의 배수$\}$　　3) $3 \in \varnothing$

7. 다음 모임가운데서 빈모임을 찾아내여라.

1) 4로 완제되는 홀수들의 모임　　2) 2보다 작은 정의 짝수들의 모임

3) $\{x \mid x>3$이고 $x<-2\}$　　4) 방정식 $3x-6=0$의 정수풀이모임

제2절. 부분모임과 나머지모임

1. 부분모임

두 모임 A와 B가 다음과 같이 주어졌다. B의 매 원소가 다 A에 드는것은 어느것인가?

1) $A=\{2, 3, 5, 7, 11\}$, $B=\{11, 3, 5\}$

2) $A=\{2, 7, 9, 3, 12\}$, $B=\{8, 1, 4, 2\}$

3) $A=\{x \mid 1<x<3\}$, $B=\{y \mid 2<y<3\}$

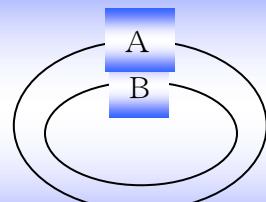
모임 B의 매 원소가 다 모임 A에 들면 B를 모임 A의 부분모임이라고 부르고 이것을

$$B \subset A$$

와 같이 표시한다. 이때 B는 A에 **포함된다**고 말한다.

B가 A의 부분모임이 아니라는것을

$$B \not\subset A$$

와 같이 표시한다.

문 제

1. 다음 모임 B는 A의 부분모임인가?

1) $A=\{x \mid x$는 4각형$\}$, $B=\{x \mid x$는 바른4각형$\}$

2) $A=\{x \mid x$는 옹근수$\}$, $B=\{x \mid x$는 자연수$\}$

3) $A=\{x \mid x$는 12의 약수$\}$, $B=\{x \mid x$는 3의 약수$\}$

4) A= $\{x \mid x$는 짝수$\}$, B= $\{x \mid x$는 홀수$\}$

5) A= $\{x \mid x$는 자연수$\}$, B= $\{x \mid x+3=0\}$

2. 다음것이 옳은가?

1) A⊂B이고 x∈A이면 x∈B

2) A⊂B이고 x∈B이면 x∈A

(모임그림으로 설명해보아라.)

알아보기 그림 1－8의 모임 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6가운데서

1) 한 원소로 된 A의 부분모임은 어느것인가?

2) 두 원소로 된 A의 부분모임은 어느것인가?

3) 세 원소로 된 A의 부분모임은 어느것인가?

4) B_5는 A의 부분모임인가?

5) $B_6=\varnothing$은 A의 부분모임인가?

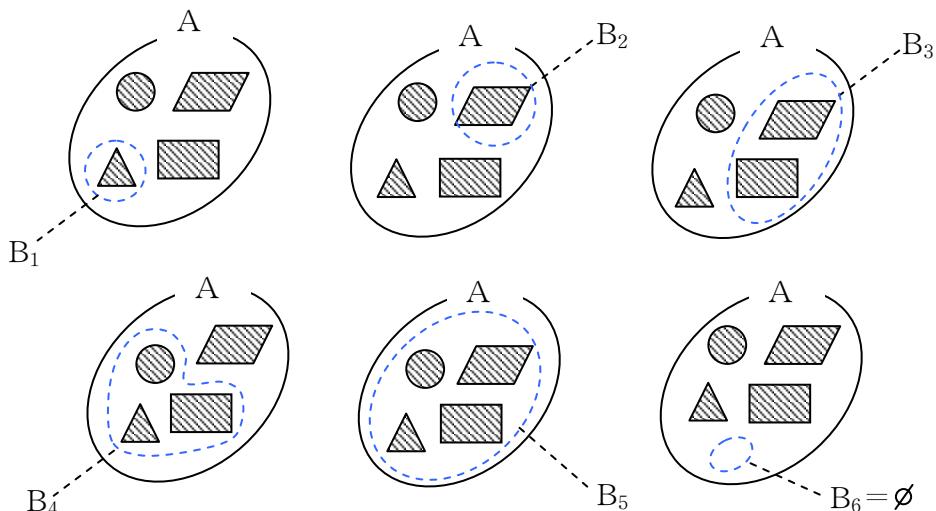



그림 1－8

매 모임은 자기자체의 부분모임이다. 즉 A⊂A

빈모임 ∅은 모든 모임의 부분모임으로 본다. 즉 ∅⊂A

빈모임도 아니고 자기자체와도 같지 않은 부분모임을 참부분모임이라고 부른다.

례 모임 A= $\{a, b\}$ 의 모든 부분모임들을 다 들어보아라.

(풀이) 모든 원소들로 이루어진 모임 $\{a, b\}$

하나의 원소로 이루어진 부분모임 $\{a\}$, $\{b\}$

빈모임은 임의의 모임의 부분모임이므로 $\varnothing$

이리하여 모임 $A=\{a, b\}$ 의 부분모임들을 다 들면

$$\{a, b\},\ \{a\},\ \{b\},\ \varnothing$$

부분모임의 개수는 $2^2=4$이다.

문 제

1. 모임 $A=\{1, 2, 3, 4\}$의 2개의 원소로 된 부분모임은 몇개 있는가? 3개의 원소로 된 부분모임은 몇개 있는가?
2. 문제 1의 모임 A의 참부분모임들은 모두 몇개 있는가?
3. 모임 $A=\{a, b, c\}$ 의 부분모임들을 다 들어보아라. 모두 몇개인가?

알아보기 모임 A= {ㄱ, ㄴ, ㄷ} 과 B= {ㄷ, ㄴ, ㄱ} 은 같은 모임인가 다른 모임인가?

> 모임 A와 B가 같은 원소들로 이루어졌을 때 모임 A와 B는 같다고 말하며 이것을 다음과 같이 표시한다.
>
> $$A=B$$

문 제

1. 다음 모임가운데서 같은 모임을 찾아내여라.

   $A=\{7, 6, 3, 1\}$, $B=\{2, 3, 6, 7\}$, $C=\{1, 7, 6, 8\}$

   $D=\{2, 7, 5, 8\}$, $E=\{6, 7, 1, 3\}$, $F=\{5, 8, 2, 7\}$
2. $\{a, a\}=\{a\}$ 가 옳은가? $\{0\}=\varnothing$은 옳은가?
3. 다음 모임들은 다 같은가?

   $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 2, 3, 4, 5, 5\}$

   $C=\{1, 2, 3, 2, 4, 5\}$, $D=\{1, 3, 2, 5, 4\}$
4. 1) $A\subset B$이고 동시에 $A\supset B$인 모임의 실례를 들어라.

   2) $A\subset B$이고 동시에 $A\supset B$이면 $A=B$라고 말할수 있는가?
5. 다음것이 옳은가? 틀린것이 있으면 바로잡아라.

   1) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}\in\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right\}$

2) $b \subset \{c, d, a, b\}$

3) $\{0, 2, 3\} \not\subset N$(N은 자연수모임)

4) $\{b, a\} \not\subset \{a, b\}$　　　5) $\varnothing \subset \varnothing$

2. 나머지모임

수학에서는 모임을 만들 때 미리 한 모임을 정해놓고 그 테두리안에서 여러가지 부분모임을 생각한다.

례를 들어 《우리 학급 최우등생들의 모임》, 《우리 학급 우등생들의 모임》이라고 할 때는 모임을 《우리 학급 학생들의 모임》안에서 생각하게 된다.

> 미리 한 모임을 정해놓고 그 부분모임만을 생각하기로 할 때 미리 정해놓은 모임을 전체모임이라고 부른다.

전체모임은 보통 글자 U로 표시하고 그림으로는 직4각형으로 표시한다.

례를 들어 모임 A가 전체모임 U의 부분모임일 때 그것을 나타내는 모임그림은 그림 1−9와 같다.

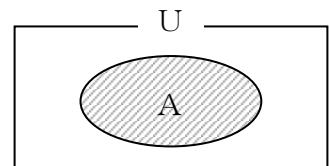
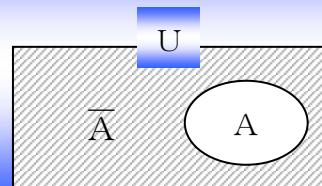



그림 1−9

해보기 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9, 10\}$을 전체모임으로 정하고 $A=\{3, 6, 9\}$라고 할 때 A에 들지 않는 원소들로 된 모임을 만들어라.

> U를 전체모임이라고 할 때 그 부분모임 A에 들지 않는 원소들로 된 모임을 A의 나머지모임이라고 부르고
>
> $\overline{A}$
>
> 와 같이 표시한다.
>
> $\overline{A}=\{x \mid x \in U$이고 $x \notin A\}$

문 제

1. 모임 U를 전체모임으로 정하고 A를 그 부분모임이라고 할 때 $\overline{A}$의 나머지모임은 어떤 모임인가?
2. $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$을 전체모임으로 정할 때 다음 부분모임들의 나머지모임을 써라.

1) B= {0}　　2) C= {2, 10}　　3) D= {2, 4, 6, 8, 10}

4) E= {0, 4, 8}　　5) $\varnothing$

3. 자연수모임을 전체모임으로 정할 때 다음 부분모임들의 나머지모임을 써라.

1) A= $\{a \mid a$는 홀수$\}$　　2) B= $\{m \mid m$은 5의 배수$\}$

3) C= $\{x \mid x=3n,\ n$은 정의 옹근수$\}$

4) D= $\{x \mid x>100,\ x$는 옹근수$\}$

5) E= $\{p \mid p$는 씨수$\}$　　6) F= $\{x \mid x-8=0\}$

7) G= $\{x \mid x<8$ 또는 $x>10,\ x$는 정의 옹근수$\}$

4. 3각형전부의 모임을 전체모임으로 정할 때 다음 부분모임들의 나머지모임을 써라.

1) A= {F | F는 바른3각형}　　2) B= {F | F는 세 변이 서로 다른 3각형}

3) C= {F | F는 뾰족3각형}　　4) D= {F | F는 직3각형}

5) E= {F | F는 세 아낙각의 합이 180°인 3각형}

5. 수축을 전체모임으로 정할 때 다음 부분모임들의 나머지모임을 써라.

1) $A=(-1,\ 1]$　　2) $B=[2,\ +\infty)$　　3) $C=(-\infty,\ -5)$

4) $D=[0,\ +\infty)$　　5) $E=(-\infty,\ 10)$

련 습 문 제

1. 옳은 답을 선택하여라.

1) 다음의 표시에서 옳은것은 ( )이다.

① $0\subset\{0\}$　　② $0\in\varnothing$　　③ $0\in\{0\}$　　④ $0\in\{\varnothing\}$

2) $\{0,\ 1\}\subset M\subset\{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2\}$ 를 만족시키는 모임 M의 개수는 ( )이다.

① 3　　② 4　　③ 7　　④ 8

2. □안에 알맞는것을 써넣어라.

모임 $M=\{x \mid x<20,\ \frac{x}{4}\in N\}$ 이면 M의 부분모임은 □개, 참부분모임은 □개, 비지 않은 부분모임은 □개이다.

3. 다음것이 옳은가?

1) $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$, $B=\{2,\ 10,\ 12\}$ 일 때 $A\subset B$

2) $A=\{6,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\}$, $B=\{15,\ 11\}$ 일 때 $B\subset A$

3) $A=\{9,\ 6,\ 7,\ 1\}$, $B=\{1,\ 6,\ 7,\ 9\}$ 일 때 $A\subset B$

4) $A=\{(-1,\ 2),\ (3,\ 5),\ (7,\ -2),\ (-3,\ -2),\ (-6,\ 0)\}$,
$B=\{(2,\ -1),\ (5,\ 3),\ (-2,\ 7),\ (-2,\ -3),\ (0,\ -6)\}$ 일 때
$A\subset B$

4. 다음 모임들가운데서 모임 $A=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9,\ 10\}$의 부분모임을 찾아라. (0부터 10까지의 수들에서 생각하여라.)

   1) 한자리수들의 모임　　　2) 짝수들의 모임

   3) 두자리수들의 모임　　　4) 세자리수들의 모임

5. 다음 모임들사이의 관계를 기호 ⊂를 써서 표시하여라.

   $A=\{x \mid x$는 3각형$\}$, $B=\{x \mid x$는 직3각형$\}$, $C=\{x \mid x$는 바른3각형$\}$

6. 다음것이 옳은가?

   1) $A \not\subset B$이고 $x \in A$이면 $x \notin B$　　　2) $A \not\subset B$이고 $x \in B$이면 $x \in A$

7. 다음 관계가 옳은가?

   1) $\{2,\ 3,\ 6\} \subset \{x \mid x$는 짝수$\}$　　　2) $\{2\} \subset \{2,\ 3\}$

   3) $\varnothing \in \{a,\ b,\ c\}$　　　4) $\varnothing \subset \{a,\ b,\ c\}$　　　5) $\varnothing \notin \{\varnothing\}$

제3절. 모임의 사귐과 합

1. 모임의 사귐

해보기 모임 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9\}$에도 들고 $B=\{6,\ 7,\ 9,\ 11,\ 12\}$에도 드는 원소들로 된 모임을 만들어라.

문 제

1. 다음 두 모임의 사귐을 구하고 그림으로 표시하여라.

   1) $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$

   2) $A=\{12,\ 13,\ 16,\ 25\}$,
      $B=\{9,\ 10,\ 18,\ 22,\ 29\}$

   3) $A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$, $B=\{b,\ c,\ e\}$

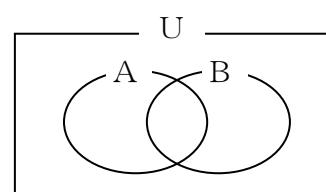



그림 1-10

2. U를 전체모임이라고 할 때 다음 모임을 그림으로 표시하여라.

1) $A \cap \overline{B}$ 2) $\overline{B} \cap B$ 3) $\overline{A} \cap \overline{B}$

4) $A \cap U$ 5) $A \cap \varnothing$ 6) $B \cap \varnothing$

1. A＝{7, 8, 9, 11, 12}, B＝{9, 11, 12, 13, 14}, C＝{11, 12, 13, 14, 15, 16} 일 때 다음 모임들은 같은 모임인가 다른 모임인가?

1) $A \cap B$와 $B \cap A$ 2) $B \cap C$와 $C \cap B$

3) $(A \cap B) \cap C$와 $A \cap (B \cap C)$

2. A＝{x | x는 16의 약수}, B＝{x | x는 32의 약수} 일 때 괄호 { }를 써서 다음것들을 표시하고 비교해보아라.

A, B, $A \cap B$, $A \cap A$

모임의 사귐의 성질

1) $A \cap B = B \cap A$ (바꿈법칙)

2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (묶음법칙)

3) $A \subset B$이면 $A \cap B = A$

특히 $A \cap A = A$

문 제

1. 모임의 사귐의 성질을 다음 그림을 보고 설명하여라.

1)

A B ⇨ A B B A ⇨ B A

$A \cap B$ $B \cap A$

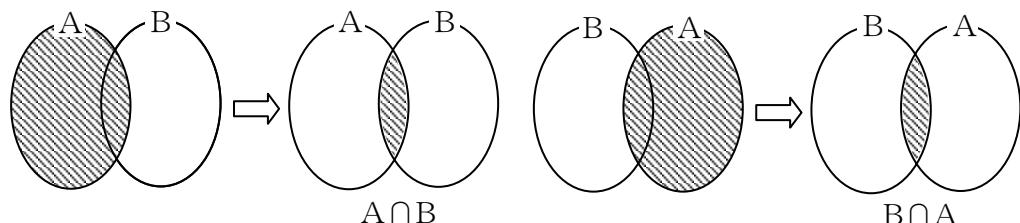



그림 1－11

2)

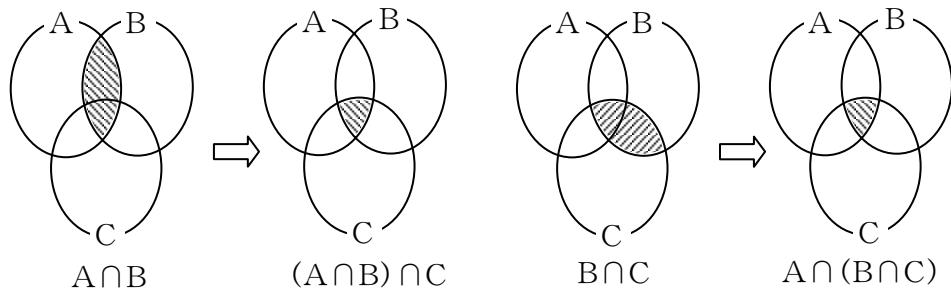



그림 1-12

2. A를 2학년 학생들의 모임, B를 하모니카를 불줄 아는 2학년 학생들의 모임, C를 손풍금을 탈줄 아는 2학년 학생들의 모임이라고 할 때 다음 모임의 의미를 말하여라.

$$A\cap B,\ B\cap C,\ (A\cap B)\cap C$$

3. 모임 A, B가 다음과 같을 때 A∩B를 구하여라.

1) A= $\{x \mid x$는 38보다 크고 56보다 작은 짝수$\}$

B= $\{y \mid y$는 44보다 크고 70보다 작은 짝수$\}$

2) A= $\{a \mid a$는 37보다 크고 50보다 작은 홀수$\}$

B= $\{b \mid b$는 40보다 크고 57보다 작은 홀수$\}$

4. A, B가 다음과 같은 수모임일 때 A∩B를 구하여라.

1) $A=\{x \mid x<2\}$, $B=\{x \mid x<4\}$

2) $A=\{x \mid -2<x<5\}$, $B=\{x \mid 0\le x<7\}$

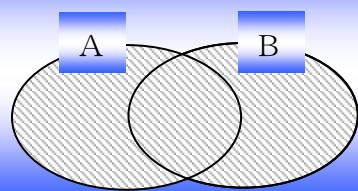
2. 모임의 합

해보기 모임 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9\}$ 나 $B=\{6,\ 7,\ 9,\ 11,\ 12\}$ 에 드는 원소들로 된 모임을 만들어라.

모임 A 또는 B에 드는 원소들로 된 모임을 A와 B의 합이라고 부르고

$$A\cup B$$

와 같이 표시한다. 즉

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 또는 } x\in B\}$$

문 제

1. 다음 두 모임의 합을 구하고 그림으로 표시하여라.
   1) A= {1, 2, 3, 4, 5} , B= {1, 3, 5, 7}
   2) A= {12, 13, 16, 25} , B= {9, 10, 18, 22, 29}
   3) A= {a, b, c, d, e} , B= {b, c, e}
2. U를 전체모임이라고 할 때 다음 모임을 그림으로 표시하여라.
   1) $A\cup\overline{B}$　　2) $\overline{A}\cup\overline{B}$　　3) $\overline{A}\cup B$　　4) $A\cup\varnothing$

알아보기 A= {7, 8, 9, 10, 11, 12} , B= {9, 10, 11, 12, 13, 14} , C= {11, 12, 13, 14, 15, 16} 일 때 다음 모임들은 같은 모임인가 다른 모임인가?
1) $A\cup B$와 $B\cup A$　　2) $C\cup B$와 $B\cup C$
3) $(A\cup B)\cup C$와 $A\cup(B\cup C)$

모임의 합의 성질

1) $A\cup B=B\cup A$ (바꿈법칙)
2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ (묶음법칙)
3) $A\subset B$이면 $A\cup B=B$
   특히 $A\cup A=A$

문 제

1. 모임의 합의 성질을 모임의 사귐의 성질과 비슷하게 그림으로 따져보아라.
2. A, B가 다음과 같을 때 합 $A\cup B$를 구하여라.
   1) A= $\{x \mid x>3\}$, B= $\{x \mid x=3\}$
   2) A= $\{x \mid -3<x<6\}$, B= $\{x \mid x<0$ 또는 $x>2\}$

련 습 문 제

1. 옳은 답을 선택하여라.
   1) A가 전체모임 U의 부분모임일 때 다음 식에서 정확한것은 (　)이다.
      ① $\overline{A}\supset\varnothing$　　② $\overline{A}\subset U$　　③ $A\cap\overline{A}=\varnothing$　　④ $A\cup\overline{A}=U$

2) 다음의 글에서 정확한것은 (　)이다.

① 임의의 모임 A는 적어도 두개의 부분모임을 가진다.

② 임의의 모임 A는 반드시 한개의 참부분모임을 가진다.

③ 만일 모임 A와 B의 사귐이 빈모임이면 A와 B가운데 적어도 한 모임은 빈모임이다.

④ 만일 모임 A와 B의 사귐이 전체모임이면 A와 B는 모두 전체모임이다.

2. 다음 두 모임의 사귐과 합을 구하여라.

1) $A=\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4, 5, 6\}$

2) $A=\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\}$, $B=\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\}$

3) $A=\{x \mid x$는 12의 약수$\}$, $B=\{y \mid y$는 16의 약수$\}$

4) $A=\{a \mid a$는 16보다 작은 3의 배수$\}$,

$B=\{b \mid b$는 50보다 작은 9의 배수$\}$

3. $A=\{$가, 나, 다, 라, 마, 바$\}$를 전체모임으로 정하자. $B=\{$가, 나, 다$\}$, $C=\{$나$\}$일 때 다음 모임을 구하고 그것을 그림으로 표시하여라.

1) $\overline{B}\cap C$　　2) $B\cap\overline{C}$　　3) $\overline{B}\cup\overline{C}$　　4) $\overline{B}\cup C$

4. A, C, D를 각각 수학, 콤퓨터, 영어성적이 최우등인 학생들의 모임, B를 수학성적이 우등인 학생들의 모임이라고 할 때 다음 모임은 무엇을 의미하는가?

1) $A\cup C$, $A\cap C$, $A\cap(C\cap D)$

2) $A\cup B$, $B\cap C$, $C\cup D$, $A\cup(C\cap D)$

5. $A=(1, 5)$, $B=(2, 7)$, $C=[5, 9)$일 때 다음 모임을 구간으로 표시하여라.

1) $A\cup B$, $A\cap B$　　2) $A\cup C$, $A\cap C$

3) $B\cap C$, $B\cup C$　　4) $(A\cap B)\cap C$

6. 자연수모임을 전체모임으로 정하자. $A=\{x \mid 2x-6=0\}$, $B=\{x \mid x-1=0\}$, $C=\{x \mid x>0\}$일 때 다음 모임을 구하여라.

$$A\cup B\cup\overline{C}$$

7. 다음것이 옳은가?

1) $(M\cap N)\subset N$　　2) $(M\cup N)\supset N$

3) $(M\cup N)\supset(M\cap N)$(례를 들어보아라.)

8. 다음 같기식이 성립한다는것을 그림으로 따져보아라.

1) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

2) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

모임그림으로

1) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

2) $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

을 따져보아라.

복 습 문 제

1. 다음 □안에 알맞는 글을 써넣어라.
   1) 모임 A에도 들고 B에도 드는 원소들로 된 모임을 A와 B의 □이라고 부른다.
   2) 모임 A 또는 B에 드는 원소들로 된 모임을 A와 B의 □이라고 부른다.
   3) 모임 A의 매 원소가 다 모임 B에 들면 모임 A를 모임 B의 □라고 부른다.
2. 옳은 답을 선택하여라.
   1) 전체모임 U={1, 2, …, 9}에 대하여 A={1, 2, 3}, B={2, 3, 4, 5, 6}, C={5, 6, 7, 8}이면 $(A \cup B) \cap \overline{C}$는 ( )이다.
      ① {1, 2}　② {1, 2, 3, 4}　③ {1, 2, 9}　④ {5, 6}
   2) 모임 A, B가 비지 않은 모임이고 $A \subset B$, 전체모임이 U일 때 다음것에서 빈 모임을 나타내는것은 ( )이다.
      ① $A \cap B$　② $\overline{A} \cap B$　③ $\overline{A} \cap \overline{B}$　④ $A \cap \overline{B}$
3. 다음것은 모임을 표시하는가?
   1) 키가 155cm이상인 남학생들　2) 학교 도서실에 있는 책들
   3) 우리 나라에 있는 낮은 산들　4) 방정식 $5x-4=0$의 풀이전부
4. 다음 모임들을 다른 방법으로 표시하여라.
   1) $\{n \mid n$은 홀수, $4<n<16\}$　2) {3, 6, 9, 12, 15}
   3) $\{x \mid x$는 3으로 나눈 나머지가 2인 수$\}$
   4) {봄, 여름, 가을, 겨울}　5) {가, 나, 다, 라, …}
5. 다음 모임가운데서 유한모임과 무한모임을 갈라내여라.
   1) 3각형들의 모임　2) 모범소년단원들의 모임
   3) 모든 조선사람들의 모임　4) $0 \le x < 3$인 부수 x들의 모임
   5) $-1<x<1$인 수 x들의 모임

6. 다음 두 모임 A, B사이의 관계를 기호 $=$, $\subset$, $\not\subset$가운데서 알맞는것으로 표시하여라.

1) A= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, B= {2, 4, 6}

2) A= $\{x \mid x$는 8의 약수$\}$, B= $\{y \mid y$는 4의 약수$\}$

3) A= $\{x \mid x$는 4각형$\}$, B= $\{y \mid y$는 평행4변형$\}$

4) A= $\{x \mid -3<x<1\}$, B= $\{y \mid -1<y<3\}$

7. $\in$, $\notin$, $=$, $\subset$, $\not\subset$가운데서 적당한것을 골라 □안에 써넣어라.

1) $\varnothing$□{0}　　2) A∪B□A　　3) $\{x \mid |x| \le 1\}$□$\{x \mid |x| < 1\}$

8. A={1, 2, 3}, B={1, 2, 3, 5, 7, 8}일 때

1) 모임 A의 부분모임을 구하여라.

2) A⊂C⊂B를 만족시키는 모임 C는 몇개인가?

3) 모임 B의 임의의 두 원소의 적을 원소로 하는 모임을 D라고 할 때 D는 몇개의 원소를 가지는가? 그의 부분모임은 몇개인가?

9. A= {1, 3, 5, 7, 9}, B∩A=$\varnothing$, A∪B= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} 라고 할 때 모임 B를 구하여라.

10. 24의 약수전부의 모임을 A, 36의 약수전부의 모임을 B라고 할 때 A∩B를 구하여라.

11. 모임 $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ 를 전체모임으로 정할 때 부분모임 A= $\{a, b, c, d, e\}$, B= $\{a, c, e, g, k\}$ 에 대하여 다음 모임을 구하여라.

1) A∩B　　2) A∪B　　3) $\overline{A} \cap B$

4) $A \cap \overline{B}$　　5) $A \cup \overline{B}$　　6) $\overline{A} \cup \overline{B}$

12. 수전부의 모임을 전체모임으로 정하고 A= $\{x \mid x<6\}$, B= $\{x \mid -1<x<10\}$, C= $\{x \mid x>3\}$ 으로 표시할 때 다음 모임을 구하여라.

1) A∩B　　2) A∪B　　3) $\overline{A} \cap B$

4) $A \cap \overline{B}$　　5) A∩B∩C　　6) A∪B∪C

13. a, b, c, d, e의 다섯글자가운데서 두 글자를 뽑는 모든 가능한 경우의 모임을 구하여라. 이때

1) a가 뽑히는 경우의 모임을 구하여라.

2) b가 뽑히는 경우의 모임을 구하여라.

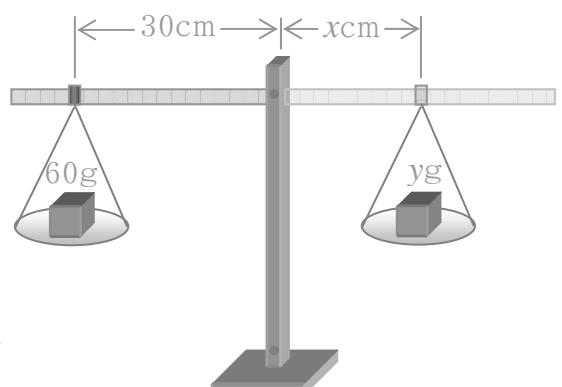
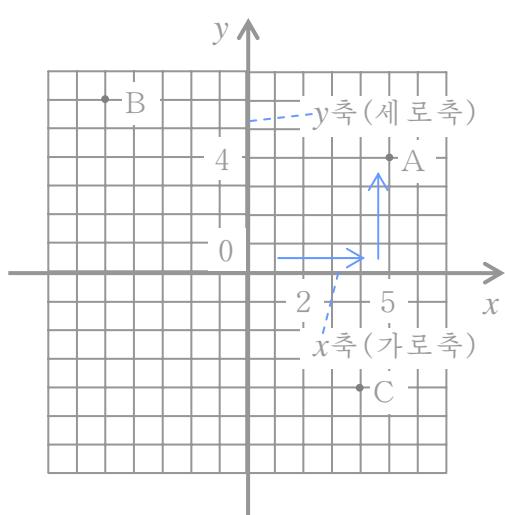
3) a 또는 b가 뽑히는 경우의 모임을 구하여라.

4) a와 b가 뽑히는 경우의 모임을 구하여라.

제2장. 비와 비례

비와 비례식

비례관계와 거꿀비례관계

비례관계와 거꿀비례관계의 그라프

제1절. 비와 비례식

1. 비

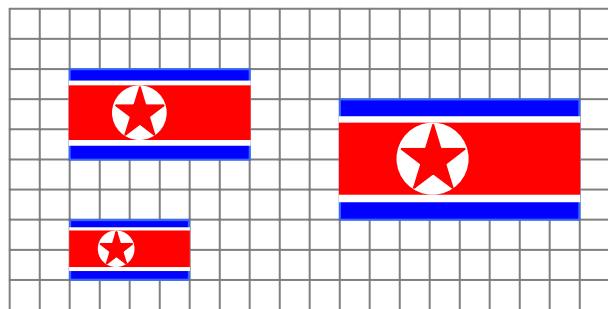



그림 2－1

조선민주주의인민공화국 사회주의헌법에는 우리 나라 기발의 세로와 가로의 비가 1 : 2라고 규정되여있다.

기발의 세로와 가로의 비가 1 : 2라는것은 세로를 1로 볼 때 가로가 2라는 관계에 있다는 뜻이다.

1) 기발의 세로를 15cm라고 하면 가로는 얼마이여야 하는가?
2) 세로를 30cm라고 하면 가로는 얼마이여야 하는가?
3) 가로가 1.2m 되게 하자면 세로는 얼마이여야 하는가?

두 수 또는 같은 종류의 두 량을 비교할 때 흔히 비라는 말을 쓴다.

두 수(또는 두 량)를 비교할 때 한 수(또는 한 량)를 a라고 보면 다른 수(또는 다른 량)는 b라는 관계에 있다는것을

$$a : b$$

와 같이 쓰고 이것을 비라고 부른다. 그리고 《a 대 b》 또는 《a와 b의 비》라고 읽는다.

(주의) 량들의 비는 보통 단위를 같아지게 고쳐서 고찰한다.

문 제

1. 다음것을 비기호를 써서 표시하여라.

   1) 3대 8　　2) $\frac{1}{2}$과 0.8의 비　　3) 5m와 7.2m의 비

   4) 40분과 50분의 비　　5) b와 c의 비　　6) c와 b의 비

2. 다음것을 비기호를 써서 표시하고 앞마디와 뒤마디를 말하여라.

   1) $7\frac{3}{5}$m와 450cm의 비　　2) 세멘트 800g과 모래 2.4kg의 비

   3) 670kg과 1t의 비　　4) 30초와 2분 10초의 비

3. 다음 비를 읽고 앞마디와 뒤마디를 말하여라.

   1) $7:3$　　2) $5\frac{7}{8}:-6.7$　　3) $3a:7b$

   4) $a:(a-b)$　　5) $(m+n):n$　　6) $(m+n):(m-n)$

4. 다음 글에서 틀린것을 바로 잡아라.

   1) 4cm와 2m의 비는 4:2이다.　　2) 7:3은 7분과 3시간의 비이다.

5. 모래와 세멘트의 섞음비가 3 : 2이다.

   1) 모래가 3t이면 세멘트를 얼마 섞어야 하는가?

   2) 모래가 126t이면 세멘트를 얼마 섞어야 하는가?

   3) 세멘트가 2t 400kg 있다. 모래가 얼마 필요한가?

3각형의 밑변과 높이의 비가 $a:b$이다.

1) $a=40$cm이고 $b=16$cm일 때 밑변은 높이의 몇배인가?

2) $a=50$cm이고 $b=20$cm일 때 밑변은 높이의 몇배인가?

비 $a:b$에서 앞마디를 뒤마디로 나눈 상 $\frac{a}{b}$를 그 비의 값이라고 부르고 다음과 같이 쓴다.

$$a:b=\frac{a}{b}$$

두 비 $a:b$와 $c:d$의 값이 같을 때 두 비는 같다고 말하고 다음과 같이 표시한다.

$$a:b=c:d \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

비 $a:b$의 값 $\frac{a}{b}$는 b를 기준으로 잡을 때 a가 b의 몇배인가를 나타내므로 $a:b$를 《b에 대한 a의 비》라고도 읽으며 흔히 비와 비의 값을 가르지 않는다.

례 1 1) 5와 2의 비와 그것의 값은

$$5:2=\frac{5}{2}=2.5$$

2) 4시간과 12시간의 비와 그것의 값은

$$4\text{시간}:12\text{시간}=\frac{4}{12}=0.(3)$$

문 제

1. 비를 말할 때 앞마디도 뒤마디도 0이 아닌것만 생각한다. 왜 그런가?
2. 다음 비의 값을 구하여라.
   1) $5:2$　　2) $-3:9$
   3) 8시간 : 36시간　　4) $1\frac{2}{5}:-3\frac{1}{2}$
3. 다음것을 비기호로 쓰고 그 값을 구하여라.
   1) 4에 대한 10의 비　　2) -0.5에 대한 0.3의 비
   3) 30분에 대한 50분의 비　　4) 32g의 1.2kg에 대한 비
4. 다음 비들가운데서 같은 비를 골라내여라.
   1) $27:45$　　2) $21:35$　　3) $14:42$　　4) $15:25$
5. 한 학급의 학생수가 35명이다. 그가운데서 최우등생이 20명이고 나머지는 우등생이다. 전체 학생수에 대한 최우등생과 우등생의 비를 각각 쓰고 그 값을 구하여라.

알아보기 다음 비들이 같은가?

1) $6:4$, $12:8$, $3:2$

2) $a:b$, $ca:cb$, $\frac{a}{c}:\frac{b}{c}$

분수의 기본성질을 비의 값에 그대로 옮겨놓을수 있다.

비의 기본성질

비의 앞마디와 뒤마디에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 같은 수로 나누어도 비의 값은 달라지지 않는다.

$$a:b=ca:cb(c\neq 0)$$

$$a:b=\frac{a}{c}:\frac{b}{c}(c\neq 0)$$

비의 기본성질을 써서 비를 간단한 옹근수의 비로 그 모양을 고치는것을 비를 간단히 한다고 말한다.

례 2 1) $0.75:1.25=75:125=3:5$

2) $3\frac{1}{3}:1\frac{2}{5}=\frac{10}{3}:\frac{7}{5}=\frac{50}{15}:\frac{21}{15}=50:21$

문 제

1. 다음 비들을 간단히 하여라.

1) $500:250$ 2) $0.0015:0.005$

3) $-0.6:1.5$ 4) $\frac{5}{6}:1\frac{3}{4}$

2. 비의 앞마디와 뒤마디에 0이 아닌 같은 수를 더하거나 덜면 비의 값이 달라지는가? 실례를 들어 따져보아라.

두 수 또는 두 량의 비와 같이 세 수 또는 세 량의 비도 생각할수 있다.

세 량 a, b, c를 비교할 때 $a:b$, $b:c$이면 비교하는 량들을 비기호로 이어서

$$a:b:c$$

와 같이 쓴다.

례 3 세멘트와 모래의 비가 1:2, 모래와 자갈의 비가 2:3일 때 세멘트, 모래, 자갈의 비는 1:2:3

세 수이상의 비에 대하여서는 그 값을 생각할수 없다.

그러나 1 : 2, 2 : 3과 같이 끊은것은 값을 가진다.

세 수이상의 비에서도 비의 매 마디에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 비의 매 마디를 같은 수로 나누어도 그 비는 변하지 않는다.

알아보기 두 비 3:2, 4:5에서 첫째 비의 뒤마디와 둘째 비의 앞마디가 같아지도록 비의 모양을 고치자면 어떻게 하면 되겠는가?

례 4 세멘트와 모래의 비는 1:2이고 모래와 자갈의 비는 3:4이다. 세멘트, 모래, 자갈의 비를 계산하여라.

(풀이) 2와 3의 최소공통배수는 6, 첫 비에 3, 둘째 비에 2를 곱하면

3:6 6:8

세멘트, 모래, 자갈의 비는 3:6:8

문 제

1. 다음과 같을 때 $a:b:c$를 써라.
   1) $a:b=1:2$, $b:c=4:5$
   2) $a:b=0.3:0.2$, $b:c=0.5:0.4$
2. 다음 비들을 간단히 하여라.
   1) 9:21:15
   2) 0.5:0.15:1
   3) $\frac{4}{5}:\frac{2}{5}:\frac{1}{2}$
   4) $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}:\frac{1}{5}$

비를 리용하여 여러가지 문제들을 풀수 있다.

례 5 수 250을 2 : 3 : 5의 비로 나누어라.

(풀이) 수 250을 2 : 3 : 5의 비로 나눌 때 한 몫을 n이라고 하면

$2:3:5=2n:3n:5n\ (n\neq0)$이고

$$2n+3n+5n=250$$

이것을 풀면 $10n=250$

$$n=25$$

그러므로 $2n=50$, $3n=75$, $5n=125$

답. 50, 75, 125

문 제

1. 수 800을 3 : 7 : 10의 비로 나누어라.
2. 100을 다음의 비로 나누어라.

   1) 2 : 3 : 6　　　　2) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6}$

3. 세 수의 합은 70이고 비는 2 : 3 : 5이다. 이 수들을 구하여라.
4. 수 99를 1 : 2 : 3 : 4 : 5의 비로 나누어라.
5. 360°의 각을 19 : 8 : 27 : 43 : 3의 비로 나누어라. 그리고 분도기를 써서 한 점 O를 공통점으로 하여 그 주위에 이 각들을 다 그려라.

2. 비례식

1. 다음 갈기식이 성립하는가?

   1) 2 : 3=6 : 9　　　　2) 7 : 8=12 : 32

   3) $\frac{1}{2} : \frac{1}{8}=4 : 1$　　　　4) $\frac{1}{3} : \frac{1}{6}=3 : 6$

2. x=2, 3, 4일 때 다음 갈기식이 성립하는가?

   1) $x : 3=8 : 6$　　　　2) $14 : 7=4 : x$

두 비를 갈기기호로 이어서 만든 갈기식을 비례식이라고 부른다.

바깥마디

$$a : b = c : d$$

아낙마디

특히

$$a : b = b : d$$

비례가운데마디

비례식도 갈기식이므로 모르는 값을 대신하는 글자가 들어있는 비례식은 방정식이다. 따라서 비례식에서도 푼다는 말을 할수 있다.

비례식에도 옳은것과 옳지 않은것이 있을수 있다. 앞으로 다른 말이 없이 비례식이라고 하면 옳은 비례식만을 생각하기로 한다.

문 제

1. 다음 비례식을 풀어라.

   1) $x:2=16:4$　　　　2) $15:36=x:12$

2. 두 비의 값이 0.6인 비례식을 하나 써보아라.

알아보기 다음 비례식이 옳은가? 바깥마디의 적과 아낙마디의 적을 비교하여라. 무엇을 알수 있는가?

1) $12:2=30:5$　　2) $2:3=4:7$　　3) $8:5=40:25$

비례식의 의미와 분수의 기본성질로부터

$$a:b=c:d \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd} \Leftrightarrow ad=bc$$

비례식의 기본성질

비례식에서 아낙마디의 적과 바깥마디의 적은 같다.

$$a:b=c:d \Leftrightarrow ad=bc$$

비례식의 기본성질은 주어진 비례식이 옳은가를 따져보거나 그것을 푸는데 자주 쓰인다.

례 1 비례식 $4a:14b=2a:8b$가 옳은가를 따져보아라.

(풀이) 비례식의 아낙마디의 적과 바깥마디의 적을 각각 계산하면

$$14b\cdot 2a=28ab$$
$$4a\cdot 8b=32ab$$

그런데 $a\neq 0$, $b\neq 0$이므로 $ab\neq 0$ 따라서 $28ab\neq 32ab$

그러므로 비례식은 옳지 않다.

례 2 비례식 $x:35=2:10$을 풀어라.

(풀이) $x\cdot 10=35\cdot 2$

$10x=70$

$x=7$

문 제

1. 다음 비례식이 옳은가 따져보아라.

1) $7:16=35:80$　　2) $3:18=9:81$

3) $\frac{7}{10}:\frac{3}{4}=\frac{2}{7}:\frac{15}{4}$　　4) $0.2:0.5=4:10$

5) $4a:14b=\frac{1}{4}a:b$　　6) $4x:2y=2x:y$

2. 다음 비례식을 풀어라.

1) $\frac{2}{8}:1=-4:x$　　2) $16ab:x=8a:3b$

3) $(x+1):3=4:5$　　4) $x:5=(x-1):2$

5) $\frac{x}{3}:\frac{5}{12}=\frac{3}{8}:\frac{5}{6}$

례 3 새로 짓는 학교건설장에 모래와 자갈을 $4:3$의 비로 실어왔다. 모래가 자갈보다 80t 더 많다면 모래와 자갈을 각각 몇t씩 실어왔는가?

(풀이) 자갈을 xt 실어왔다고 하면 모래는 $(x+80)$t 실어온것으로 된다.

그런데 실어온 모래와 자갈의 비가 $4:3$이므로

$$(x+80):x=4:3$$

이것을 풀면

$$3(x+80)=4x$$

$$3x+240=4x$$

$$x=240$$

모래는 $240+80=320$(t)

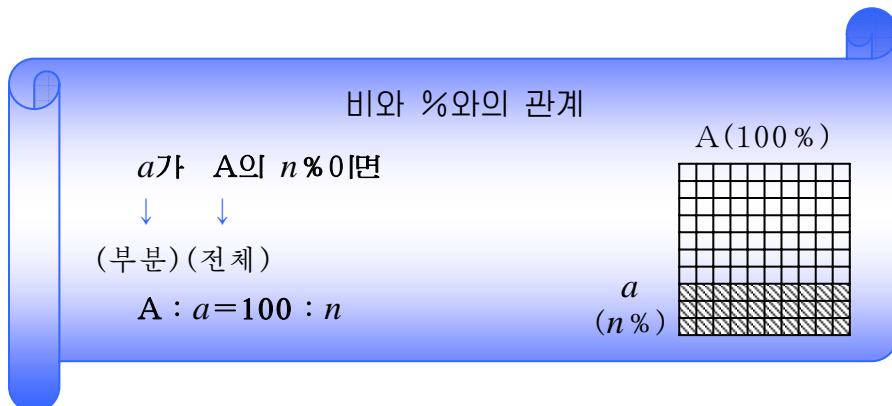
답. 모래 320t
자갈 240t

문 제

1. 자동차 25대를 두 작업장에 $2:3$의 비로 갈라보내려고 한다. 매 작업장에 자동차를 각각 몇대씩 보내야 하는가?

2. 14m의 쇠줄로 가로와 세로의 비가 $4:3$인 직4각형을 만들려고 한다. 가로와 세로를 각각 몇cm로 하여야 하는가?

3. 두 로동자가 기계부속품을 깎는데 첫째 로동자가 5개 깎는 동안에 둘째 로동자는 7개 깎는다. 모두 96개를 깎았다면 두 로동자는 각각 몇개씩 깎았겠는가?

1. 어떤 량 a의 1%란 무엇을 의미하는가?
2. 1의 6%, 0.5%, 86.7%는 각각 얼마인가?
3. 180의 72%는 얼마인가?
4. a는 b의 7%이다. 이것을 식으로 써라.

례 4 한 학급 학생수의 72%가 최우등생이다. 이 학급 학생수와 최우등생의 비를 구하여라. 이 학급 학생이 모두 25명이라면 최우등생은 몇명인가?

(풀이) (학급 학생수) : (최우등생수)=100 : 72

최우등생을 x라고 하면 학급 학생수는 25이므로

$$25 : x = 100 : 72$$
$$100x = 25 \times 72$$
$$x = 18$$

답. 100 : 72(25 : 18)
18명

문 제

1. 한 작업반에 있는 부침땅의 75%가 논이고 나머지는 밭이다. 논과 밭의 비를 구하여라.
2. 한 학교의 학생들이 《소년단림》에 잣나무와 아카시아나무를 새로 심었는데 그 비는 2 : 3이다. 새로 심은 나무의 몇%가 잣나무인가?

련 습 문 제

1. 다음 비를 쓰고 그 값을 구하여라.

   1) 3cm에 대한 18cm의 비　　　2) $\frac{2}{3}$L와 4L의 비

   3) 0.25kg의 0.75kg에 대한 비

2. 비의 값이 다음과 같은 두 수의 비를 각각 2개씩 써라.

   1) 0.5　　2) 0.001　　3) 1.25

   4) $\frac{1}{3}$　　5) $1\frac{1}{10}$

3. 다음 비들을 간단히 하여라.

   1) 150t : 350t　　2) 0.5 : 0.7　　3) $4 : 2\frac{1}{6}$

   4) 0.1 : 0.5 : 0.3　　5) $\frac{1}{7} : \frac{3}{4} : \frac{1}{2}$

4. 큰 통에 1kg 드는 그릇으로 소금을 10번 넣고 8.5kg 드는 그릇으로 물을 10번 넣었다. 소금과 물의 섞음비는 얼마인가?

5. 어느 한 군의 5년동안의 알곡생산량은 다음 표와 같다.

년 도	2007	2008	2009	2010	2011
알곡생산량(만t)	10	12	13	15	18

   매해 알곡생산량의 2007년도 알곡생산량에 대한 비의 값을 각각 구하고 %로 표시하여라.

6. 비의 마디를 다음과 같이 변화시킬 때 비의 값은 어떻게 변하는가?

   1) 비의 앞마디를 2배 하였을 때　　2) 비의 뒤마디를 $\frac{1}{3}$배 하였을 때

   3) 비의 앞마디는 $\frac{1}{2}$배, 뒤마디는 3배 하였을 때

   4) 비의 앞마디는 3배, 뒤마디는 5배 하였을 때

7. 다음 비례식이 옳은가 따져보아라.

   1) 12 : 2=30 : 5　　2) 2 : 12=5 : 30

   3) 30 : 12=5 : 2　　4) $9x : 5y = 8x : 3y$

8. 다음 비례식을 풀어라.

1) $\frac{3}{2} : x = \frac{3}{4} : \frac{5}{6}$ 2) $8x : 3 = \frac{2}{3} : \frac{1}{24}$

2) $2a : x = 3a : b$ 4) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = 5 : x$

9. 조국해방전쟁시기 한 조선인민군 습격조원들이 적진지를 쳐서 적들을 완전히 소멸하였다. 소멸된 적가운데 미국놈이 70놈이고 미국놈과 괴뢰군놈들의 비가 5 : 2였다. 괴뢰군을 몇놈 소멸하였는가?

10. 72cm의 쇠줄로 빗변이 30cm이고 두 직각변의 비가 3 : 4인 직3각형을 만들었다. 직각변들의 길이를 구하여라.

11. 세멘트, 모래, 자갈을 1 : 2 : 4의 비로 섞어서 콩크리트를 쳤다. 자갈이 112t 들었다면 이 콩크리트에 세멘트와 모래가 각각 얼마씩 들었겠는가?

12. 동이 64.8%, 석이 32.8%, 연이 2.4% 들어있는 합금 750kg에는 이 금속들이 각각 얼마씩 들어있는가?

13. 어떤 합금을 만드는데 철은 60%, 규소는 30%, 그밖의것은 10% 섞는다. 이렇게 만든 500kg에는 철이 얼마 들었겠는가?

14. $a : b = c : d$가 성립하면 다음 비례식들도 성립한다는것을 밝혀라.

$$a : c = b : d$$

$$d : b = c : a$$

$$b : a = d : c$$

15. $a : b = c : d$가 성립하면 다음 식이 성립한다는것을 밝혀라.

$$\frac{ma}{mb} = \frac{nc}{nd}, \quad \frac{ma}{nb} = \frac{mc}{nd}$$

16. $a : b = c : d$가 성립하면

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

가 성립한다는것을 밝혀라.

17. $a : b = c : d$가 성립하면

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

가 성립한다는것을 밝혀라.

제2절. 비례관계와 거꿀비례관계

1. 비례관계

많은 량들은 서로 맞물려 변한다. 변하는 량을 글자로 표시하면 그 글자는 여러가지 값을 잡는다. 변하지 않는 량을 글자로 표시하면 그 글자는 어떤 한 값만을 잡는다.

여러가지 값을 잡는 글자를 변수, 수나 일정한 값만을 잡는 글자를 상수라고 부른다.

자동차가 달린 시간과 달린 거리는 서로 맞물려 변한다. 자동차가 달린 시간을 글자 x로 표시하고 달린 거리를 글자 y로 표시하면 x와 y는 변수이다.

해보기 어떤 자동차가 x시간 달린 거리를 $y$km라고 하면 x의 값에 따라 y의 값이 하나씩 정해진다. 자동차가 달린 시간과 거리를 각각 재여 다음과 같은 표를 만들었다.

x시간	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$y$km	20	30	60	120	180	240

1) 변수 x와 y의 값들의 상 $\frac{y}{x}$를 계산하여라.

2) 변수 x의 값이 2배, 3배, … 로 되면 y의 값은 각각 몇배로 되는가?

3) y를 x에 관한 식으로 표시하여라.

두 량 x, y에 대하여 x와 y사이의 관계가 식 $y=ax(a\neq0)$로 표시될 때 y는 x에 비례한다고 말하고 상수 a를 비례결수라고 부른다.

이때 비례관계 $y=ax$라고도 말한다.

앞의 해보기에서 자동차가 달린 거리 y는 달린 시간 x에 비례하고 비례결수는 60이다. $y=ax$일 때 $x=\frac{1}{a}y$ 즉 y가 x에 비례하면 x도 y에 비례한다. 그러므로 x, y가 비례한다고 말할 때가 많다.

문 제

1. 다음 식들에서 비례관계를 갈라내고 그 비례결수를 말하여라.

   1) $y=-3x$　　2) $S=-t$　　3) $y=\frac{3}{10^3}x$

   4) $S=2t+3$　　5) $\frac{y}{2u}=0.03$　　6) $uy=\frac{1}{10^2}$

2. z가 y에 비례하고 y가 x에 비례하면 z는 x에 비례한다고 말할수 있는가?
3. 다음과 같은 경우에 y가 x에 비례한다는것을 말할수 있다. 왜 그런가?

   1) $y=ax$라는것을 알수 있을 때

   2) $\frac{y}{x}$의 값을 조사해본 결과 그것이 일정할 때

   3) x의 값이 c배로 변하면 y의 값도 c배로 변할 때

4. 0℃일 때 길이가 1m인 쇠줄이 있다. 온도를 높여가면서 그것의 길이가 얼마나 느는가를 조사해가지고 다음과 같은 표를 얻었다.

온도 x℃	10	20	30	40	50
는 길이cm	0.12	0.24	0.36	0.48	0.6

   이때 y는 x에 비례하는가? x와 y의 관계를 식으로 표시하여라.

5. 순희는 x살 때 키가 $y$cm였다.

x살	8	9	10	11	12
$y$cm	122	128	135	142	146

   이때 y는 x에 비례하는가?

6. $y=2x$일 때 x의 값과 그에 따라 정해지는 y의 값을 10쌍 써라. 이때 $x+1$과 $y+1$이 비례하는가?
7. 다음 두 량은 비례하는가?

   1) 같은 속도로 달릴 때 지나간 거리와 걸린 시간

   2) 바른6면체의 한 모서리의 길이와 그 체적

두 량이 비례하는 실례는 대단히 많다.

1) 용수철이 늘어나는 길이는 잡아당기는 힘에 비례한다.

2) 일정한 속도로 달리는 자동차가 달린 거리는 달린 시간에 비례한다.

3) 물건값은 그 물건의 개수에 비례한다.

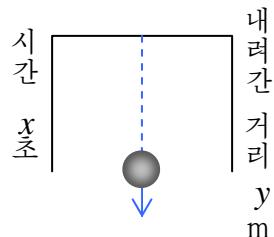



그림 2-2

물건이 떨어지기 시작해서 x초동안에 아래로 내려간 거리 ym를 재여 다음과 같은 표를 얻었다.

x초	1	2	3	4	5	6	…
ym	4.9	19.6	44.1	78.4	122.5	176.4	…

1) 우의 표에서 y는 x에 비례하는가?

2) x^2과 y를 마주 세워보면 다음 표와 같다.

x^2	1	4	9	16	25	36
y	4.9	19.6	44.1	78.4	122.5	176.4

(1) x^2을 하나의 변수로 보면 y는 x^2에 비례하는가?

(2) x^2과 y의 관계를 식으로 표시하여라.

두 량 x, y에 대하여 x와 y사이의 관계가 식

$$y=ax^2\,(a\neq0)$$

으로 표시될 때 y는 x^2에 비례한다고 말한다.

문 제

1. 한 량이 다른 량의 2제곱에 비례하는가를 판정하는 방법을 아는대로 말하여라.

2. 변수 y를 x에 관한 식으로 표시하고 y가 x에 관해서 어떤 비례하는 관계에 있는가를 말하여라.

   1) 직경 $x$cm인 원의 둘레 $y$cm

   2) 철이 1cm^{3}의 질량이 7.86g일 때 철 $x$cm^{3}의 질량 yg

3. 길이 $x$cm, 너비 $y$cm, 높이 10cm인 직6면체의 체적을 $z$cm^{3}로 표시할 때 z는 어떤 량에 비례하는가?

2. 거꿀비례관계

그림 2－3에서 지레대의 팔이 $x$cm 되는 점에 몇g의 물건을 놓을 때 지레대가 수평으로 되는가를 실험해보고 다음과 같은 표를 얻었다.

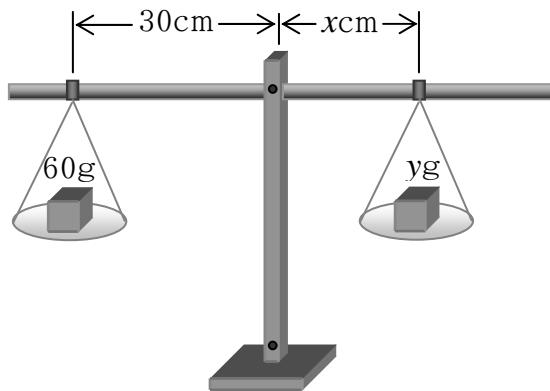



그림 2－3

$x$cm	10	20	30	40	50	60
yg	180	90	60	45	36	30

1) 변수 x와 y의 값들의 적 xy를 계산하여라.

2) 변수 x의 2배, 3배, …로 되면 y의 값이 각각 몇배로 되는가?

3) y를 x에 관한 식으로 표시하여라.

두 량 x, y에 대하여 x와 y사이의 관계가 식

$$y=a\frac{1}{x}\ (a\neq 0)$$

로 표시될 때 y는 x에 거꿀비례한다고 말하고 상수 a를 거꿀비례결수라고 부른다.

이때 거꿀비례관계 $y=a\frac{1}{x}$이라고도 말한다.

앞의 알아보기에서 물건의 질량 y는 팔의 길이 x에 거꿀비례하고 그 거꿀비례결수는 1 800이다.

$$y=a\frac{1}{x} \text{일 때 } x=a\frac{1}{y}$$

즉 y가 x에 거꿀비례하면 x도 y에 거꿀비례한다. 그러므로 x, y가 거꿀비례한다고 말할 때도 많다.

문 제

1. 다음 식들가운데서 거꿀비례관계를 갈라내고 그 거꿀비례결수를 말하여라.

   1) $y=\frac{x}{3}$　　2) $y=-0.04\frac{1}{x}$　　3) $uv=10^6$

   4) $\frac{y}{3x}=-10^3$　　5) $t=\frac{5}{S}$　　6) $\frac{3}{y}=u+2$

2. z가 y에 거꿀비례하고 y가 x에 거꿀비례하면 z는 x에 거꿀비례한다고 말할수 있는가?

3. 다음과 같은 경우에 y가 x에 거꿀비례한다고 말할수 있는가? 왜 그런가?

   1) $y=a\frac{1}{x}$이라는것을 알수 있을 때

   2) x, y의 값을 조사해본 결과 그것이 일정할 때

   3) x의 값이 c배로 변하면 y의 값이 $\frac{1}{c}$배로 변할 때

4. 다음 표는 부속품 1개를 만드는데 걸리는 시간(x분)과 1시간동안에 만들수 있는 부속품의 개수(y개)를 적은것이다.

x분	1	2	3	4	5	6		12		20	30
y개	60	30	20	15			6		4		

   1) y는 x에 거꿀비례한다고 말할수 있는가? 빈칸을 채워라.

   2) y를 x에 관한 식으로 표시하여라.

5. y가 x에 거꿀비례하면 y는 $x-1$에 거꿀비례하는가? 실례를 가지고 따져보아라.

6. 다음 두 량들가운데서 비례하는것, 거꿀비례하는것, 비례도 거꿀비례도 하지 않는것들을 갈라내여라.

   1) 직4각형의 한 변의 길이와 면적

   2) 일정한 시간동안에 가는 거리와 속도

   3) 일정한 곳까지 가는데 간 거리와 남은 거리

알아보기 1. $y=a\frac{1}{x}$일 때 $\frac{1}{x}$을 하나의 변수로 보면 y는 $\frac{1}{x}$ 즉 x의 거꿀수에 비례한다고 말할수 있는가?

2. $y=a\frac{1}{x^2}$일 때 y는 $\frac{1}{x^2}$ 즉 x^2의 거꿀수에 비례한다고 말할수 있는가?

> 두 량 x, y에 대하여 x와 y사이의 관계가
>
> $$y=a\frac{1}{x^2} \quad (a\neq 0)$$
>
> 로 표시될 때 y는 x^2에 거꿀비례한다고 말한다.

문 제

1. 한 량이 다른 량의 2제곱에 거꿀비례하는가를 판정하는 방법을 아는대로 말하여라.
2. 가로, 세로가 다 $x$cm이고 높이가 $y$cm인 직6면체그릇에 일정한 량의 물을 가득 담으려고 한다. y를 x에 관한 식으로 표시하고 y가 x에 관하여 어떤 비례관계에 있는가를 말하여라.

3. 비례관계와 거꿀비례관계의 응용

례 1 어떤 종이 100장이 380g이다. 그 종이가 6.84kg이면 몇장인가?

(풀이) 종이의 장수 y는 그것의 질량 xg에 비례한다.

그러므로 $y=ax$

그런데 $x=380$일 때 $y=100$이므로

$$a=\frac{100}{380}=\frac{5}{19} \quad 따라서\ y=\frac{5}{19}x$$

이로부터 $x=6840$일 때 $y=\frac{5}{19}\cdot 6840=1800$(장)

답. 1 800장

문 제

1. 어떤 비닐선 160m가 72kg이다. 이런 비닐선 500m는 몇kg인가?
2. 굵기가 1cm^{2}인 수은기둥 5cm의 무게는 같은 굵기의 물기둥 68cm의 무게와 같다. 수은기둥 76.8cm와 같은 무게의 물기둥의 높이는 얼마인가?
3. 철 8cm^{3}의 질량이 62.4g이다. 이런 철 61cm^{3}의 질량은 얼마인가?
4. 내의 3벌을 뜰수 있는 털실로 장갑 26컬레를 뜰수 있다. 이런 내의 15벌을 뜰수 있는 털실로는 장갑을 몇컬레 뜰수 있는가?
5. 한 선반으로 3시간반내에 기계부속품 56개를 깎을수 있다. 이 선반으로 8시간에는 기계부속품을 몇개 깎을수 있는가?

례 2 5대의 자동차로 16일동안에 나를수 있는 짐을 8대의 자동차로 나르면 며칠 걸리겠는가?

(풀이) 일을 하는데 걸리는 날자수 y는 자동차의 대수 x에 거꿀비례한다.

그러므로 $y=a\frac{1}{x}$

그런데 $x=5$일 때 $y=16$이므로

$$16=a\cdot\frac{1}{5} \qquad a=16\cdot5=80$$

따라서 $y=80\frac{1}{x}$

이로부터 $y=80\cdot\frac{1}{8}=10$ 답. 10일

문 제

1. 한시간에 5.6km씩 가면 40분 걸리는 거리를 $\frac{7}{12}$시간에 가려면 한시간에 얼마씩 가야 하는가?
2. 직경이 300mm인 바퀴가 1분동안에 400번 돈다. 이것과 피대로 련결된 직경이 200mm인 바퀴는 1분동안에 몇번 돌겠는가?
3. 너비가 80cm인 천 84m의 면적은 너비가 60cm인 천 몇m의 면적과 같은가?
4. 로동자들이 매일 8명씩 일하면 9일동안에 다할수 있는 일감을 기술혁신을 하여 사람을 더 받지 않고 6일동안에 끝냈다. 한 사람이 몇배의 일을 한셈인가?

5. 자전거의 발디디개에 달린 치차의 이발은 48개이고 뒤바퀴에 달린 치차의 이발은 16개이다. 발디디개를 1분동안에 40번 돌리면 뒤바퀴는 몇번 돌겠는가? 뒤바퀴의 직경이 65cm라고 하면 1분동안에 몇m 가겠는가? 발디디개를 1분동안에 60번 돌리면 얼마나 가겠는가?

6. 8대의 뜨락또르가 12일동안에 갈수 있는 논을 8일동안에 갈았다면 매 뜨락또르가 일을 몇%로 넘쳐한것으로 되는가?

련 습 문 제

1. 다음 식들에서 비례하는 관계와 거꿀비례하는 관계를 갈라내고 그 결수를 말하여라.

1) $y=0.3x$ 2) $y=3+x$ 3) $y=\frac{5}{x}$ 4) $y=\frac{x}{5}$

5) $x=y$ 6) $x=\frac{1}{y}$ 7) $xy=-\frac{1}{5}$ 8) $x+y=0$

9) $\frac{y}{x}=0$ 10) $S=\frac{3}{t}+2$

2. y가 x에 비례한다. 비례결수를 말하고 다음 표의 빈칸을 채워라.

1)

x	2		6	10		13
y		9	18		36	

2)

x	-3	-1		3	7	9
y			2		14	

3)

x	10	14	18	7	6	-2
y	-5					

3. 다음 표를 보고 y는 x에 비례한다고 말할수 있는가?

x	5	10	25	50	100
y	1.6	3	7	13	25

4. 다음 표들가운데서 x와 y가 비례하는 경우를 갈라내고 그 비례결수를 말하여라.

1)

x	15	16	17	18	19
y	126.30	134.72	143.14	151.56	159.98

2)

x	10	15	25	35	105
y	−4	−6	−10	−15	−35

5. y는 x에 비례한다. $x=3$일 때 $y=8$이면 $x=-3$일 때 y는 얼마인가?

6. y는 x^2에 비례한다. $x=-1$일 때 $y=-3$이면 $x=0.2$일 때 y는 얼마인가?

7. y가 x에 비례하면 $3y$는 $4x$에 비례하는가? 그때 비례결수는 얼마인가?

8. y가 x에 거꿀비례할 때 다음 표의 빈칸을 채우고 거꿀비례결수를 써라.

1)

x	−6	2		10	8	
y			112		7	−4

2)

x		−2	−1	0.5		
y	1		3		−3	−0.5

9. 다음 표는 24km를 가는데 간 거리 $x$km와 남은 거리 $y$km를 조사하여 적은것이다.

$x$km	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$y$km	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4

1) 간 거리가 커짐에 따라 남은 거리가 어떻게 변하는가?

2) 남은 거리 y는 간 거리 x에 거꿀비례한다고 말할수 있는가?

10. 다음 표가운데서 x와 y가 거꿀비례하는 경우를 갈라내고 그 거꿀비례결수를 말하여라.

1)

x	−6	−3	2	12	18	36
y	−0.06	−0.12	0.18	0.03	0.02	0.01

2)

x	-2	6	18	12	9
y	-1	3	9	6	14

11. y가 x에 거꿀비례하는데 $x=2$일 때 $y=6$이다. $x=4$일 때 y는 얼마인가?
12. y가 x의 2제곱에 거꿀비례하는데 $x=-1$일 때 $y=3$이다. $x=-3$일 때 y는 얼마인가?
13. y가 x에 거꿀비례할 때 $5y$는 $-3x$에 거꿀비례하는가? 이때 거꿀비례결수는 얼마인가?
14. 자동차가 72km를 달리는데 5kg의 휘발유가 들었다. 45km의 거리를 가자면 휘발유가 얼마 있어야 하는가? (자동차가 달린 거리와 쓰는 휘발유의 량은 어떤 관계가 있는가를 밝히고 풀어라.)
15. 두가지 물건값이 같은 %로 내렸다. 120원 하던 물건값이 90원이면 200원 하던 물건값은 얼마인가? 값이 내린 %와 물건값은 어떤 관계에 있는가?
16. 한 아동단원이 공작원아저씨로부터 련락임무를 받고 한시간에 5km씩 걸어서 2시간 30분만에 목적지에 도착하였다. 임무를 수행하고 돌아올 때는 한시간에 4km씩 걸었다. 돌아오는데 몇시간 걸렸겠는가?

제3절. 비례관계와 거꿀비례관계의 그라프

1. 자리표평면

극장관람표에는 자리번호가 씌여져있다.

1) 자리번호 6렬 5번은 무엇을 의미하는가?

2) 6렬 5번을 간단히 (6, 5)로 쓰기로 하면 이것은 (5, 6)과 어떻게 다른가?

평면에서 서로 수직으로 사귀는 두 수축을 그으면 평면의 점을 두 수의 렬로 표시할수 있다.

평면에서 수직인 두 직선을 긋고 그 사귐점을 O로 표시하자.

점 O를 출발점으로 하여 오른쪽방향과 우로 향하는 방향을 각각 정방향으로 정하고 단위길이를 정해놓자. 이때 보통 가로직선을 **가로축** 또는 **x축**, 세로직선을 **세로축** 또는 **y축**이라고 부른다.

점 O로부터 가로축의 정방향으로 5단위만큼 가고 련이어 세로축의 정방향으로 4단위만큼 가서 점 A를 찍자. 이때 두 수의 렬 (5, 4)를 **점 A의 자리표**라고 부르고 A(5, 4)와 같이 표시한다. 그리고 5를 **점 A의 $\boldsymbol{x}$자리표**(또는 **가로자리표**), 4를 **점 A의 $\boldsymbol{y}$자리표**(또는 **세로자리표**)라고 부른다.

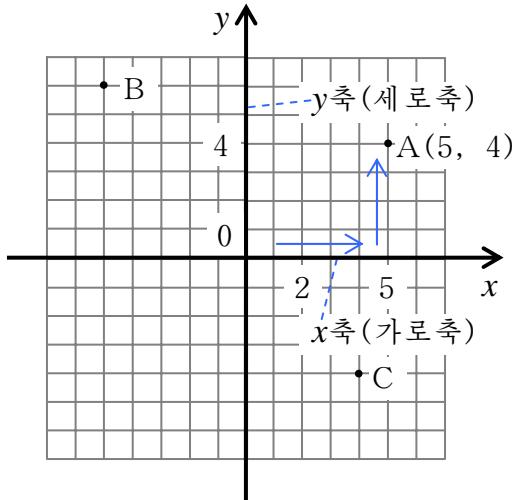



그림 2-4

자리표평면

평면에서 점 A의 자리를 표시하는 두 수 a, b의 렬 (a, b)를 점 A의 자리표라고 부르고

A(a, b)

x자리표 y자리표

와 같이 표시한다.

우에서와 같이 점의 자리표를 정할수 있게 자리표축(x축과 y축)이 정해진 평면을 자리표평면이라고 부른다. 그리고 점 O를 자리표원점이라고 부른다.

자리표원점 O의 자리표는 (0, 0)이다.

문 제

1. 1) 그림 2-4의 자리표평면에서 점 B와 C의 자리표를 말하여라. 자리표는 어떻게 찾아야 하는가?
   2) 점 A의 자리표에서 두 수의 차례를 바꾸면 어느 점의 자리표가 되는가?

2. 다음 자리표를 가진 점들을 자리표평면에 찍어라.

A(2, 2), B(−5, 2), C(−4, −2), D(1, −3), E(−3, 4)

3. 그림 2−5에서 점 A, B, C, D의 자리표를 말하여라.

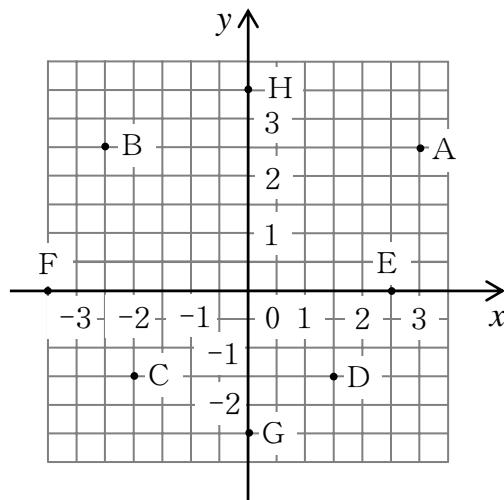



그림 2−5

4. 다음 자리표를 가지는 점들을 자리표평면에 찍어라.

A(0, 2), B(0, −5), C(3, 0), D(−4, 0), E(0, 0)

5. 1) 그림 2−5에서 점 E, F, G, H의 자리표를 말하여라.

2) x자리표가 0인 점들은 어디에 놓이는가?

3) y자리표가 0인 점들은 어디에 놓이는가?

6. 1) 점 A(3, 5)와 점 B(−3, 5)를 자리표평면에 찍어라. 이 점들은 y축에 관해서 서로 대칭이라고 말할수 있는가?

2) 점 C(−2, 4)와 D(2, −4)를 자리표평면에 찍어라. 이 점들이 원점에 관해서 대칭으로 되는가?

알아보기 점 (2, 3)을 다음과 같이 옮겼을 때 새 자리의 점의 자리표를 구하여라.

1) 가로축에 관하여 대칭으로

2) 세로축에 관하여 대칭으로

3) 자리표원점에 관하여 대칭으로

4) 가로 정방향으로 5만큼

5) 세로 부방향으로 5만큼

자리표평면의 분구

자리표평면은 자리표축들에 의하여 4개 부분으로 갈라진다.

이때 갈라진 매 부분을 각각 1사분구, 2사분구, 3사분구, 4사분구라고 부른다.

Ⅰ : 1사분구

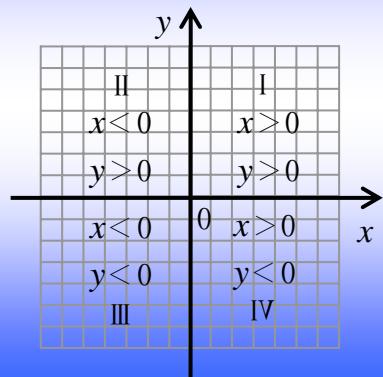
Ⅱ : 2사분구

Ⅲ : 3사분구

Ⅳ : 4사분구

매 분구의 점들의 자리표가 가지는 부호는 그림에 밝혀져있다.

자리표축은 어느 분구에도 들지 않는다.

문 제

1\. 다음 자리표를 가지는 점들을 자리표평면에 찍어라.

M(−1, 0), N(0, −1), P(1, 1), Q(−1, −1)

2\. 1) 점 A(2, 4)와 x축에 관하여 대칭인 점 B의 자리표를 구하여라.

2) y축에 관하여 점 A와 대칭인 점 C의 자리표를 구하여라.

3) 자리표원점에 관하여 점 A와 대칭인 점 D의 자리표를 구하여라.

3\. 점 A(2, 6), B(−3, 1), C(−4, −2), D(5, −1), E(−3, −2), F(3, 0), G(0, −5), H(−2, 0)들가운데서

1) 1사분구에 있는 점들을 불러보아라.

2) 2사분구, 3사분구, 4사분구에 있는 점들을 불러보아라.

3) x축, y축에 있는 점들을 불러보아라.

4\. 다음 점들은 각각 어느 분구에 놓이는가?

A(−3, 5), B(−1, −2), C(1.5, $\frac{2}{3}$), D(10, −25), M(125, 112), N(56, −190), P(−200, −100), Q(−1200, 560)

5\. 정점이 다음과 같은 3각형을 그려라.

1) A(−4, 3), B(1, 0), C(5, 1)

2) M(−3, 4), N(4, 5), P(1, −3)

6\. 정점이 다음과 같은 3각형을 그리고 그 면적을 구하여라.

A(−3, −3), B(5.5, −3), C(3, 6)

상식

자리표법의 창시자 데까르뜨

프랑스수학자 데까르뜨(1596년－1650년)는 변량에 관한 수학을 세우는데서 중요한 공헌을 하였다. 그는 침대우에 누워서 천정을 쳐다보며 사색하군 하였는데 천정에서 거미가 줄을 치는것을 보다가 점의 위치를 수학적으로 표시할수 있는 방법인 자리표법을 착상하였다고 한다. 그는 또한 수학에 변수를 도입하여 운동과 변하는 량을 수학적으로 다룰수 있는 방법을 내놓음으로써 변량수학의 시기를 열어놓는데 큰 기여를 하였다.

2. $y=ax$의 그라프

비례 $y=3x$가 주어졌다.

1) 다음 표에 있는 x의 값에 대한 y의 값을 구하여 표의 빈칸을 채워라.

x	…	－3	－2	－1.5	－1	－0.5	0	0.5	1	1.5	2	3	…
y	…												…

2) x와 y의 마주 있는 값들의 렬을 만들어라.

…, (－3,), (－2,), (－1.5,), (－1,), (－0.5,), (0,), (0.5,), (1,), (1.5,), (2,), (3,), …

3) 이 렬들을 자리표로 하는 점들을 자리표평면에 찍어라.

4) 이 점들을 맺으면 어떤 선이 되는가?

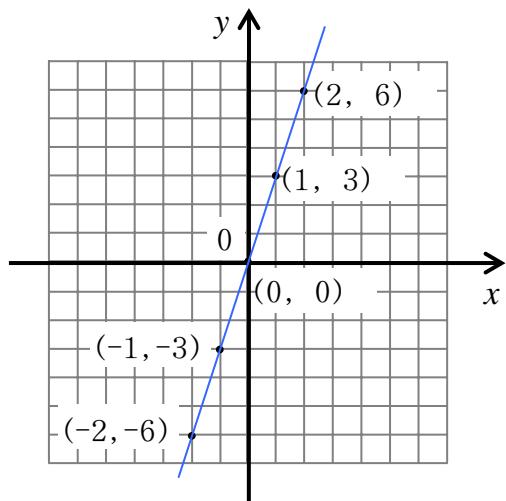



그림 2－6

x, y자리표가 $y = ax$에 맞는 점전부의 모임을 비례관계 $\boldsymbol{y = ax}$의 그라프라고 부른다.

해보기 우에서와 같은 방법으로 비례관계 $y=-1.5x$의 그라프를 그려라.

1) 그라프는 자리표원점을 지나는가?

2) 그라프는 점 (1, -1.5)를 지나는가?(그림 2−7)

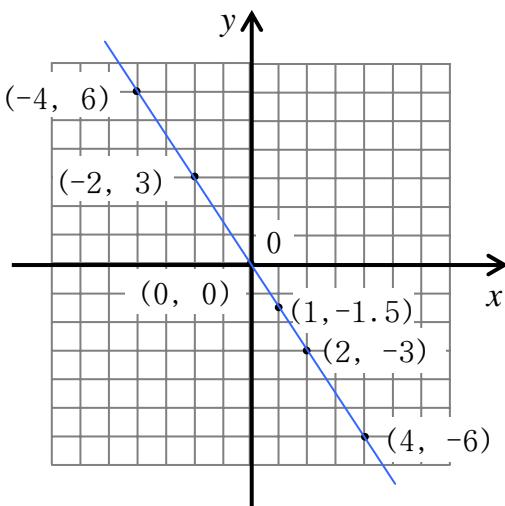



그림 2−7

비례관계 $y=ax\,(a\neq0)$의 그라프는 자리표원점 (0, 0)과 점 (1, a)를 맺는 직선이다.

문 제

1. $y=4x$의 그라프를 그리고 $x=-2.5$, $x=3.5$일 때 y의 값들을 각각 계산하여라.
2. $y=0.5x$의 그라프를 그리고 어떤 x의 값들에서 y의 값이 각각 -3, -1, 1.5로 되는가를 말하여라.
3. 비례하는 관계를 표시하는 그림 2−8의 그라프들을 보고 비례결수를 정하여라. 그리고 y를 x에 관한 식으로 표시하여라.

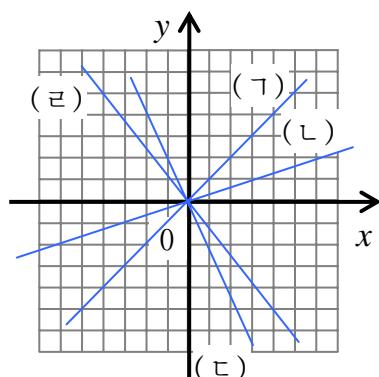



그림 2−8

4. 비례결수가 정수일 때와 부수일 때 비례관계의 그라프가 각각 어느 분구에 놓이는가를 말하여라.

3. $y=a\frac{1}{x}$의 그라프

거꿀비례 $y=8\frac{1}{x}$이 주어졌다.

1) $x=0$에서 y의 값이 정해지는가?

2) 다음 표에 지적된 x의 값에 대한 y의 값을 구하여 표를 만들어라.

x	…	−8	−6	−4	−2	−1	−0.5	…	0.5	1	2	4	6	8	…
y															

3) 앞의 표에서 x, y의 마주 있는 값들의 렬 …, (−8,), (−6,), (−4,), (−2,), (−1,), (−0.5,), … , (0.5,), (1,), (2,), (4,), (6,), (8,), …을 만들어라.

4) 이 렬들을 자리표로 가지는 점들을 자리표평면에 찍어라.

5) 이런 점들을 차례로 맺으면 어떤 곡선이 되는가? (그림 2−9)

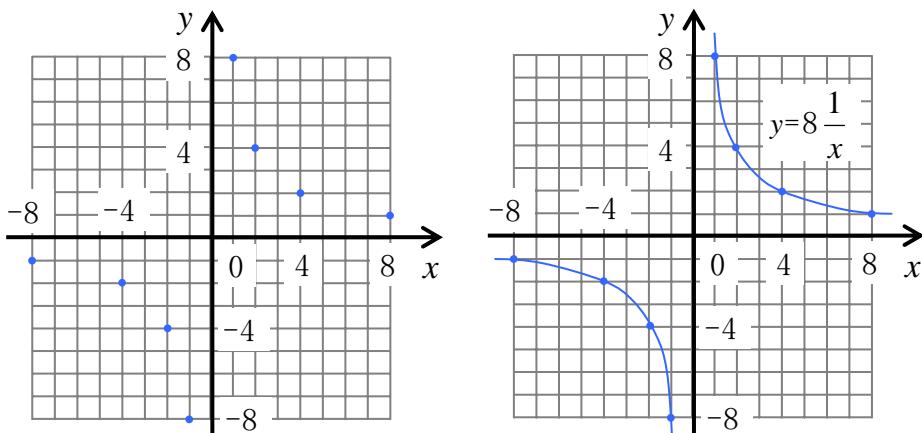



그림 2−9

x, y자리표가 $y=a\frac{1}{x}$에 맞는 점전부의 모임을 $y=a\frac{1}{x}$의 그라프라고 부른다. 이러한 모양의 그라프를 쌍곡선이라고 부른다.

문 제

그림 2-9의 곡선모양을 살펴보고 다음 물음에 대답하여라.

1) x가 0.1, 0.01, 0.001, …과 같이 0에 가까와갈 때 y의 값은 어떻게 변하는가?

2) x가 -0.1, -0.01, -0.001, …과 같이 부의 값을 잡으면서 0에 가까와갈 때 y의 값이 어떻게 변하는가?

3) x의 절대값이 한없이 커질 때 y의 값은 어떻게 변하는가?

4) $x=1$과 $x=-1$에 대응하는 곡선의 점들은 자리표원점에 관하여 서로 어떤 자리에 있는가?

5) $x=2$와 $x=-2$에 대응하는 곡선의 점들은 자리표원점에 관하여 서로 어떤 자리에 있는가?

해보기 우에서와 같은 방법으로 거꿀비례관계 $y=-8\frac{1}{x}$의 그라프를 그리고 곡선이 변하는 모양에 대하여 앞문제의 물음에서와 같이 따져보아라.

거꿀비례관계 $y=a\frac{1}{x}$ $(a\neq 0)$의 그라프는 두 부분으로 갈라지는데 한쪽 부분의 점들은 다른쪽 부분의 점들과 자리표원점에 관하여 대칭이다.

문 제

1. $y=4\frac{1}{x}$과 $y=-4\frac{1}{x}$의 그라프를 하나의 자리표평면에 그리고 $x=2.5$, $x=4.2$일 때의 y값을 읽어라.

2. $y=-\frac{1}{x}$의 그라프를 그리고 어떤 x의 값에서 y의 값이 -3, -1, 1.5, 2로 되는가를 찾아내여라.

3. 거꿀비례하는 다음 그라프를 보고 거꿀비례결수를 각각 정하여라. 그리고 y를 x의 식으로 각각 표시하여라. 거꿀비례결수가 정수일 때와 부수일 때 거꿀비례하는 관계의 그라프들은 각각 어느 분구에 놓이는가?

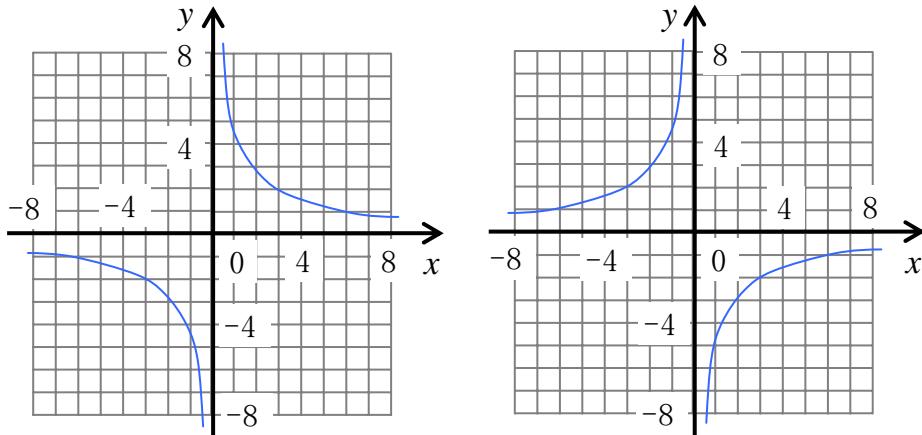



그림 2－10

련 습 문 제

1. 자리표평면에 다음 점들을 찍어라.

   A(2, 4), B(3, -3), C(5, -4), D(-6, 3), E(-7, 2), F(1, -5), G(0, 2), H(-5, 0), M(0, -3), N(4, 0)

2. 다음 점들은 각각 어느 분구에 놓이는 점들인가? 자리표축에 놓이는 점은 어느것인가?

   A(3, 0), B(-3, 4), C(0, -5), D(-2, -4), E(0, 5), F(-1, 2), G(3, -4), H(0.5, 6)

3. 그림 2－11에서 점 A, B, C, D, E, F의 자리표를 말하여라.

4. 자리표평면에서 정점이 A(4, 3), B(5, 9), C(-6, 3)인 3각형의 면적을 구하여라.

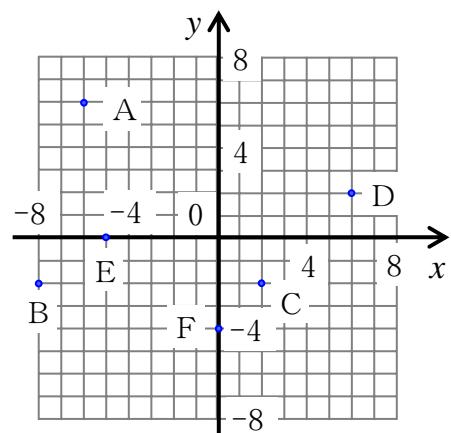



그림 2－11

5. 자리표평면에서 정점이 A(−2, 5), B(3, 8), C(7, 1), D(3, −4)인 4각형의 면적을 구하여라.

6. 자리표평면에서 정점의 자리표가 각각 다음과 같은 두 절선 ABCD와 MNK를 그리고 그 사귐점이 몇개인가를 말하여라.

   A(3, −2), B(−1, 3), C(4, 2), D(3, −5), M(−4, 1), N(1, −1), K(2, 4)

7. 자리표평면에서 정점이 A(2, 2), B(2, −2), C(−2, 2)인 3각형이 있다.

   1) 매 정점과 가로축에 관하여 대칭인 점의 자리표를 구하여라.

   2) 매 정점과 세로축에 관하여 대칭인 점의 자리표를 구하여라.

   3) 매 정점과 자리표원점에 관하여 대칭인 점의 자리표를 구하여라.

8. 다음 비례관계의 그라프를 그려라.

   1) $y=0.2x$　　　2) $y=-0.75x$　　　3) $y=11.5x$

   그라프를 보고 $y>0$, $y<0$인 x의 범위를 각각 말하여라.

9. 한시간에 4km씩 가는 소년단행군대렬이 x시간동안에 $y$km를 갔다. x와 y사이의 관계를 식으로 표시하고 그라프를 그려라.

10. 어떤 비례관계의 그라프가 점 A(−3, 6)을 지난다는것을 알았다. 이 비례관계를 표시하는 식을 구하여라. 그리고 그라프를 그려라.

11. 비례결수 a가 다음과 같은 값을 가질 때 비례관계 $y=ax$의 그라프는 어느 분구에 놓이는가?

    1) $a=0.001$　　　2) $a=-563$　　　3) $a=2567.5$

12. 다음 거꿀비례관계의 그라프를 그려라.

    1) $xy=-6$　　　2) $xy=2$

    그라프를 보고 $x>2$, $x<2$인 y의 범위를 구하여라.

13. 어떤 거꿀비례관계의 그라프가 점 B(2, −6)을 지난다는것을 알았다. 이 거꿀비례를 표시하는 식을 구하여라. 그리고 그 그라프를 그려라.

14. 바른4각형 ABCD의 정점 A는 자리표원점에 놓이고 D의 자리표는 (−4, −4)이다. 나머지 정점 B, C의 자리표를 구하여라.

15. 한 3각형의 면적이 8cm^{2}이다. 그 밑변을 $x$cm, 높이를 $y$cm로 표시할 때 y를 x의 식으로 표시하여라. 그리고 그라프를 그려라.

16. 다음 식으로 주어진 거꿀비례관계의 그라프는 어느 분구에 놓이는가?

    1) $y=0.001\frac{1}{x}$　　　2) $y=-2\frac{1}{x}$

    3) $y=-1200\frac{1}{x}$　　　4) $y=1567.8\frac{1}{x}$

복 습 문 제

1. 다음 비를 옹근수의 비로 고치고 그 값을 계산하여라.

   1) 1.8 : 1.2　　　　2) 1.54 : 4.62

   3) $\frac{1}{3}:\frac{2}{5}$　　　　4) $5:2\frac{3}{4}$

2. 학교에서 사과나무와 밤나무를 450그루 심었다. 사과나무와 밤나무수의 비는 4 : 5이다. 사과나무와 밤나무를 각각 몇그루 심었는가?

3. 금희는 은희보다 책을 60페지 더 많이 읽었다. 금희가 읽은 책페지수에 대한 은희가 읽은 책페지수의 비는 2 : 7과 같다. 금희와 은희는 책을 각각 몇페지씩 읽었는가?

4. 동, 석, 아연을 41 : 8 : 1로 섞어 합금을 만들었다. 이 합금의 어떤 덩이에 아연이 석보다 2kg 480g 적게 들어있다. 그 덩이는 몇kg인가?

5. 5개의 바른4각형이 있다. 둘레의 비는 1 : 2 : 3 : 4 : 5이다. 이 바른4각형들의 변들의 비는 얼마인가?

6. ▱안에 900, 700, 800, 600을 차례로 갈아넣으면 ▭안에 각각 어떤 수가 나오게 되는가?(그림 2－12)

그림 2－12

7. 다음 비례식을 풀어라.

   1) $(x+2):3x=5:12$

   2) $(3x-5):2=(4x-1):3$

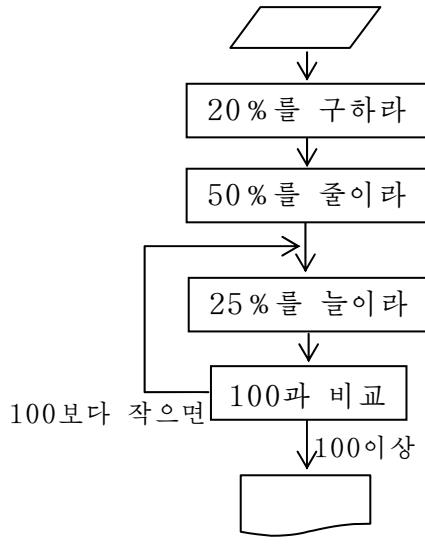
   3) $6:x=7:(10-x)$

   4) $2\ell:(1+\ell+4\ell^2)=1:(1+2\ell)$

   5) $x:(x^2+1)=1:(x+4)$　　　　6) $m:(1+m^2)=1:(2+m)$

8. 다음 비례식이 옳은 비례식이 되도록 □안에 알맞는 식을 써넣어라.

   1) $3x:5y=\square:20yz^2$　　　　2) $\square:(x+1)(x-1)=(x+1):(x-1)$

   3) $a:(a+b)=1:\square$　　　　4) $rs:(r^2+s^2)=1:\square$

9. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{q}{p}=\frac{r}{s}$이면 $\frac{aq}{bp}=\frac{cr}{ds}$이라는것을 밝혀라.

10. $a+b+c=0$일 때 비 $a:(b+c)=b:(c+a)=c:(a+b)$의 값을 구하여라.

11. 한시간에 $v$km의 속도로 t시간 간 거리를 Skm로 표시할 때 v, t, S사이에는 어떤 관계가 있는가?

1) $v=10$일 때 t와 S사이에는 어떤 관계가 있는가?

2) $t=5$일 때 v와 S는 어떤 관계에 있는가?

3) S=120일 때 v, t는 어떤 관계에 있는가?

12. 다음 두 량이 비례하는가 거꿀비례하는가를 밝히고 비례결수를 말하여라.

1) 기차는 일정한 속도로 t시간동안에 Skm 갔다.

2) 자동차를 타고 한시간에 $v$km의 속도로 가면 평양에서 개성까지의 거리를 t시간동안에 갈수 있다.

3) 면적이 일정한 3각형의 높이는 h이고 밑변은 b이다.

13. 다음 주장이 옳은가? 옳지 않으면 왜 그런가?

1) 《세 사람이 18km를 갔다. 따라서 열 사람이 60km를 갈것이다.》

2) 《10명의 로동자들이 5일동안에 집을 지을수 있다. 따라서 2 000명의 로동자들이 동원되면 30분동안에 집을 지을수 있다.》

14. y가 x에 거꿀비례할 때 x가 $\frac{3}{4}$배 되면 y는 몇배로 되는가?

15. 다음 식가운데서 x가 y에 비례하는것과 거꿀비례하는것을 갈라내여라.

1) $3y=x$ 2) $y=x+1$ 3) $xy=4$

4) $\frac{y}{x}=5$ 5) $\frac{1}{y}=2x$

16. 다음 글을 같기식으로 표시하여라.

1) 바른4각형의 면적은 한 변의 2제곱에 비례한다. 비례결수는 1이다.

2) 질량이 일정할 때 구리줄의 길이는 직경의 2제곱에 거꿀비례한다. 직경이 30mm일 때 길이는 1m이다.

17. 2.5t 싣는 자동차 140대로 날라야 할 짐이 있다. 이 짐을 7t 싣는 자동차로 나른다면 몇대의 자동차가 있어야 하는가? 또 10t 싣는 자동차로 나른다면 몇대의 자동차가 있어야 하는가?

18. 가는 동선 1m가 4g이다. 이런 동선 150g의 길이는 몇m인가?

19. 다음 점들을 자리표평면에 찍어라.

A(2, －3), B(－3, 4), C(0, 3)

1) 점 A(2, －3)을 가로축의 정의 방향으로 3만큼 옮긴 점의 자리표를 말하여라.

2) 점 B(－3, 4)를 세로축의 정의 방향으로 2만큼 옮긴 점의 자리표를 말하여라.

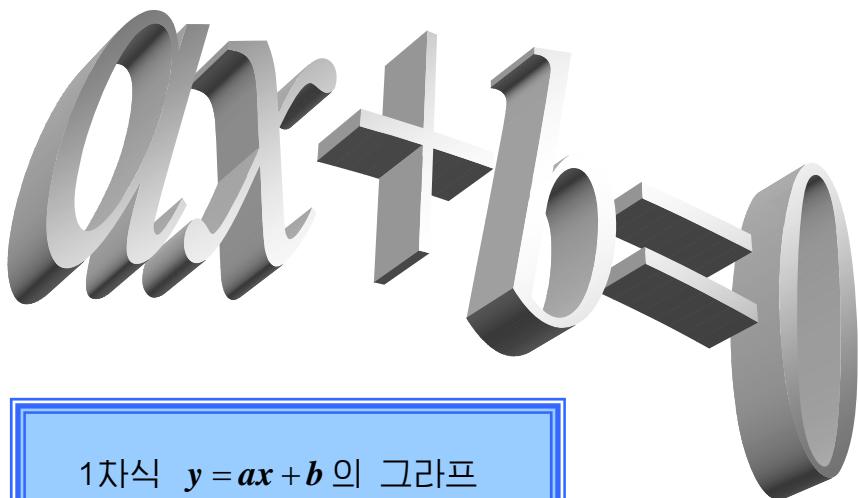
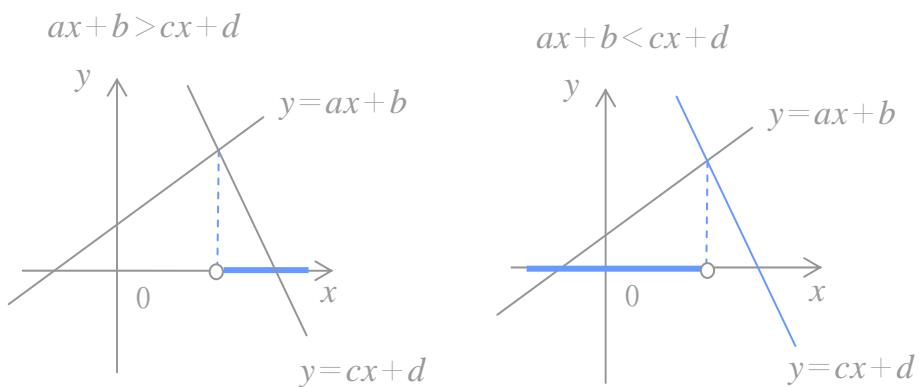
3) 점 C(0, 3)을 가로축과 세로축에 관하여 각각 대칭으로 옮길 때 얻는 점들의 자리표를 말하여라.

20. 점 A(2, 4)를 x축에 관하여 대칭인 점 B로 옮기고 련이어 y축에 관하여 대칭인 점 C로 옮겼다. 이 세 점을 정점으로 하는 3각형의 면적을 구하여라.

21. 다음 식의 그라프를 그려라.

1) $y=4x$　　2) $y=8-0.1x$　　3) $xy=6$　　4) $y=-\dfrac{2}{x}$

22. x와 y는 비례하고 $x=23.7$일 때 $y=8.3$이다. y를 x에 관한 식으로 표시하고 그 그라프를 그려라. 그리고 다음 표의 빈칸을 다 채워라.

x	23.7	15.9	26.2		9.4
y	8.3			5.8	

제3장. 1차방정식과 1차안같기식

제1절. 1차식 $y = ax + b$의 그라프

1차식 $y=ax+b$에서 x에 값을 주면 y가 정해진다.

이때 (x, y)로 정해지는 점들전부의 모임을 1차식 $y=ax+b$의 그라프라고 부른다.

례 1 비례관계 $y=2x$의 그라프를 그리면 그림 3-1과 같다.

이것은 $a=2$, $b=0$인 1차식 $y=ax+b$의 그라프이다.

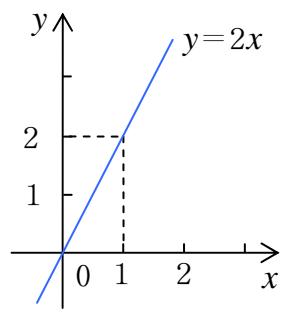



그림 3-1

알아보기 1차식 $y=0.5x$, $y=0.5x+2$의 그라프를 그려보아라. 매 x에 대하여 $0.5x+2$의 값과 $0.5x$의 값이 차이가 어떤가?

먼저 x의 여러 값에 대응하는 y의 값들을 구하여 다음과 같은 표를 만들자.

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=0.5x$	…	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	…
$y=0.5x+2$	…	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	…

표를 보면 x의 여러 값에 따르는 $0.5x+2$의 값은 $0.5x$의 값보다 늘 2만큼 더 크다. 그러므로 $y=0.5x+2$의 그라프는 $y=0.5x$의 그라프를 y축의 정방향으로 2만큼 평행이동하여 얻을수 있다.(그림 3-2)

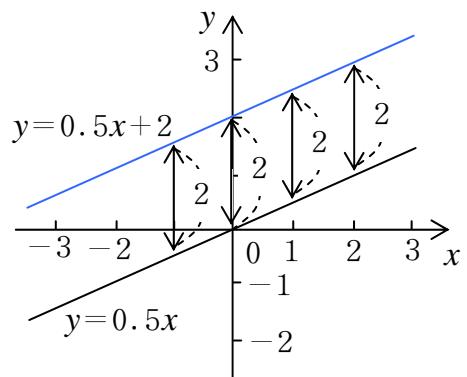



그림 3-2

1차식 $y=ax+b$의 그라프는 비례관계 $y=ax$의 그라프를 y축방향으로 b만큼 평행이동한것이다.

비례관계 $y=ax$의 그라프는 직선이다. 그러므로 $y=ax+b$의 그라프도 직선이다.

이것을 간단히 《직선 $y=ax+b$》라고 부를 때도 있다.

직선 $y=ax+b$는 거기에 놓이는 두 점만 알면 쉽게 그릴수 있다.

례 2 $y=2x-3$의 그라프를 그려라.

(풀이) x에 적당한 두 값, 례를 들어 -1과 3을 주어 y의 값을 정하자.

$x=-1$이라고 하면

$$y=2\cdot(-1)-3=-5$$

$x=3$이라고 하면 $y=2\cdot3-3=3$

따라서 $y=2x-3$의 그라프는 두 점 $(-1, -5)$와 $(3, 3)$을 지나는 직선이다.(그림 3-3)

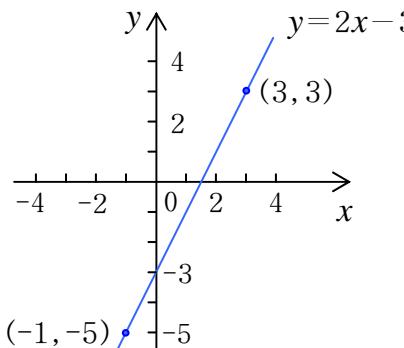



그림 3-3

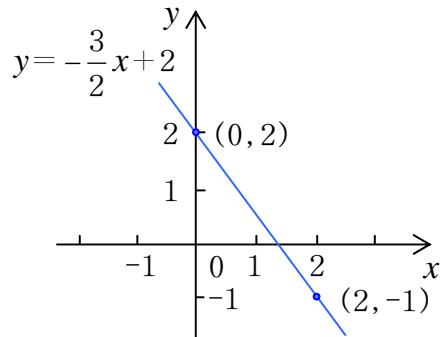



그림 3-4

례 3 $y=-\frac{3}{2}x+2$의 그라프를 그려라.

(풀이) $x=0$이라고 하면 $y=2$

$x=2$이라고 하면 $y=-\frac{3}{2}\cdot2+2=-1$

따라서 $y=-\frac{3}{2}x+2$의 그라프는 두 점 (0, 2)와 (2, −1)을 지나는 직선이다.(그림 3−4)

$y=ax+b$의 그라프를 그릴 때 그것의 두 점가운데서 한 점은 그라프가 y축과 사귀는 점 $(0, b)$로 잡는것이 편리하다.

문 제

1. 다음 1차식의 그라프를 그려라.

 1) $y=x+3$ 2) $y=4x-3$ 3) $y=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}x$

2. 1차식 $y=0.5x+3$의 그라프를 그리고 그것을 보면서 다음 모임을 구하여라.

 1) $\{x| y=0\}$ 2) $\{x| y>0\}$ 3) $\{x| y<0\}$

3. 다음 직선은 자리표평면의 어느 분구를 지나는가?

 1) $y=0.2x+1$ 2) $y=-0.6x-2$ 3) $y=-3x+2$
 4) $y=0\cdot x+1$ 5) $2y=-3x$

1. $y=|x|$의 그라프는 직선인가? 실지 그려보고 말하여라.
2. $y=|ax-b|$에서
 1) $a>0, b>0$
 2) $a>0, b<0$
 3) $a<0, b>0$
 4) $a<0, b<0$
 인 경우 그라프를 그려보아라.

련 습 문 제

1. 다음 직선을 그려라.

 1) $y=2.5x+3$ 2) $y=-2x+3$ 3) $y=-4x-1$

2. 1번 문제에서 그라프를 보고 다음 물음에 대답하여라.

 1) y값이 0으로 되는 x의 값은 얼마인가?

2) y값이 정수인 x의 구간을 구하여라.

3) y값이 -5보다 작아지는 x의 구간을 구하여라.

4) x의 값이 늘면 y의 값이 어떻게 변하는가?

3. 1차식 $S=\frac{t}{2}+6$에 따라서 직선운동하는 물체가 지나간 거리 S의 그라프를 그려라. 이 그라프를 보고 시간 t가 2에서 4까지 변할 때 S가 얼마나 변하는가를 말하여라.

4. 그라프를 그리지 말고 다음 점들이 직선 $y=-3x+5$의 점인가 아닌가를 말하여라.

$(3,\ -4)$, $(1.8,\ -0.4)$, $(0,\ 3)$, $(\frac{1}{3},\ 4)$, $(\frac{1}{2},\ 6)$

5. 직선 $y=ax+2$의 그라프가 점 $(2,\ 10)$을 지난다. a의 값을 구하여라.

6. 다음 식의 그라프를 그려라.

1) $y=|x|+2$　　2) $y=|2x-1|$　　3) $y=|2x-3|+2$

7. 위대한 령도자 **김정일**대원수님께서 책을 많이 읽을데 대하여 주신 유훈을 높이 받들고 영남이는 혁명소설을 읽고있다. 이미 120페지를 읽었다. 이제 하루에 25페지씩 x일 읽으면 모두 y페지를 읽게 된다. 1차식으로 표시하여라.

제2절. 1차방정식

> $ax+b=0\ (a\neq0)$모양의 방정식을 1차방정식이라고 부른다. 여기서 a, b는 상수이다.

찾기 1차식 $y=\frac{1}{3}x+1$의 그라프를 보고 y값이 0으로 되는 x값을 찾아라.

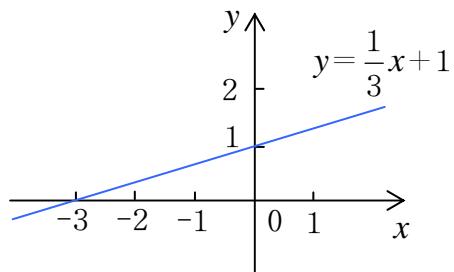



그림 3-5

> 방정식 $ax+b=0$의 풀이는 직선 $y=ax+b$가 x축과 사귀는 점의 x자리표와 같다.

례 1 방정식 $\frac{1}{2}x-3=0$을 그라프로 그리면 다음과 같다.(그림 3-6)

직선 $y=\frac{1}{2}x-3$이 x축과 사귀는 점은 (6, 0)이다.

이때 x자리표 6은 주어진 방정식의 풀이이다.

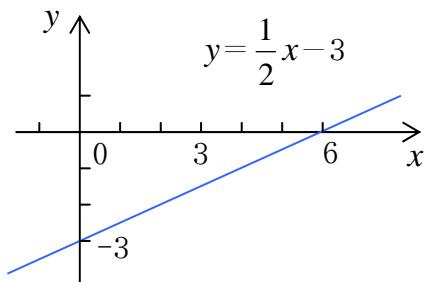



그림 3-6

문 제

그라프로 다음 방정식의 풀이를 구하여라.

1) $\frac{1}{2}x-3=0$　　2) $3-2x=0$　　3) $-0.6x+2=0$

찾기 그림 3-7은 두 1차식

$$y=x+1,\ y=-\frac{4}{5}x+5.5$$

의 그라프이다.

1. 이것을 보고 두 1차식의 값이 같아지는 x의 값을 구하여라.
2. 다음 1차방정식

$$x+1=-\frac{4}{5}x+5.5$$

의 풀이와 비교하여라.

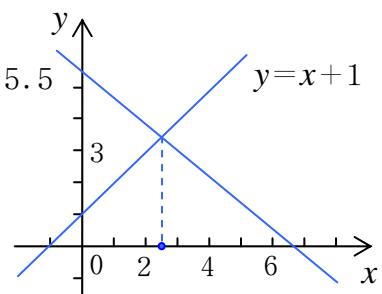



그림 3-7

방정식 $ax+b=cx+d$의 풀이는 1차식 $y=ax+b$와 $y=cx+d$의 그라프가 사귀는 점의 x자리표와 같다.

문 제

그라프로 다음 방정식의 풀이를 구하여라.

1) $x+3=x-2$ 2) $x+\frac{3}{4}=-\frac{2}{3}x-2$

례 2 방정식

$$|x-2|=3x$$

의 풀이를 구하여라.

(풀이) 1) $x-2\geq 0$인 경우 즉 $x\geq 2$인 경우를 보자.

이때 $|x-2|=x-2$이므로 주어진 방정식은

$x-2=3x$

$-2=2x$

따라서 $x=-1$

$x=-1<2$이므로 $x=-1$은 풀이가 아니다.

2) $x-2<0$인 경우 즉 $x<2$인 경우를 보자.

이때 $|x-2|=-(x-2)$이므로 주어진 방정식은

$-(x-2)=3x$

$2=4x$

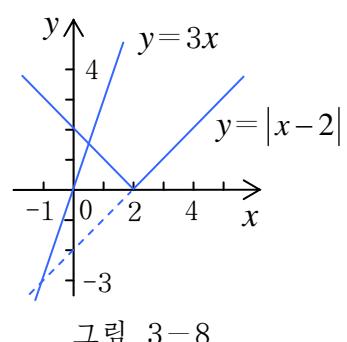
따라서 $x=\frac{1}{2}$

답. 풀이모임 $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

이것을 그라프로 풀어보자.

$y=|x-2|$의 그라프는 $y=x-2$의 그라프를 그리고 x축의 아래쪽에 놓인 직선부분을 x축에 관하여 대칭이동하면 된다.

$y=|x-2|$와 $y=3x$의 그라프를 그리면 그림 3-8과 같다.

그림 3-8

$y=|x-2|$와 $y=3x$의 그라프의 사귐점의 x자리표는 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 $|x-2|=3x$의 풀이는 $\frac{1}{2}$이다.

문 제

다음 방정식의 풀이를 두가지 방법으로 구하여라.

1) $|x-3|=0.5x$ 2) $|5-2x|=0.5x$ 3) $|2x-1|=2x-3$

련 습 문 제

1. 다음 방정식을 그라프로 풀어라.

   1) $\frac{1}{5}x+1=0$ 2) $16-2x=2x$

   3) $\frac{2}{3}x+1=6-x$ 4) $0.5x+11=4-3x$

2. 다음 방정식을 풀어라.

   1) $2x+1=|x+5|$ 2) $|1-3x|=2x-9$

   3) $\left|\frac{4}{3}x-4\right|=\frac{1}{3}x+2$

3. 그림 3-9와 같은 직4각형 ABCD의 변을 따라 두 점 P와 Q가 각각 B와 E를 동시에 떠나 꼭같이 1초에 1cm씩 C를 향하여 움직여간다.

   1) 점 P와 Q가 움직이기 시작하여 x초후에 △ABP의 면적을 $y\text{cm}^2$, △ADQ의 면적을 $z\text{cm}^2$라고 하면 y와 z는 각각 어떤 식으로 표시되는가? 이 식의 그라프를 그려라.

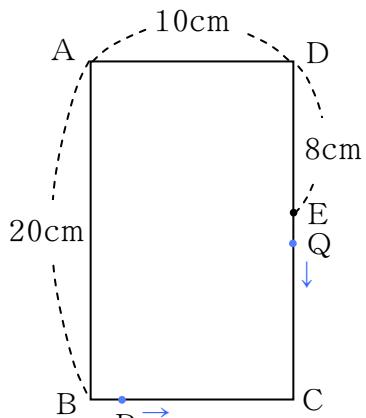
   2) 그라프를 보고 △ABP와 △ADQ의 면적이 같게 되는 x의 값을 구하여라.

그림 3-9

4. 다음 방정식을 두가지 방법으로 풀어라.

   1) $|x-4|=x$ 2) $|x|+1=-2x-4$

5. 다음 방정식을 풀어라.(a는 상수)

   1) $3x+a=2$ 2) $|ax+3|=7$

제3절. 1차안같기식

$ax+b>0\ (a\neq 0)$모양의 안같기식을 1차안같기식이라고 부른다. 여기서 $>$대신에 $<$, $\geq$, $\leq$가 들어갈수 있다.

찾기 1차식 $y=-\frac{2}{3}x+1$의 그라프를 보고 $y>0$, $y<0$으로 되는 x의 값을 구하여라.

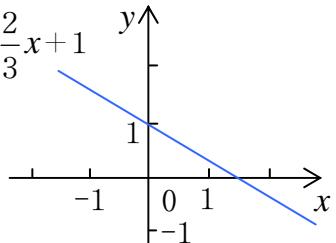
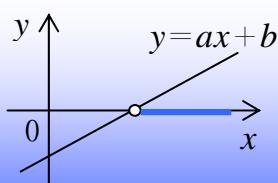
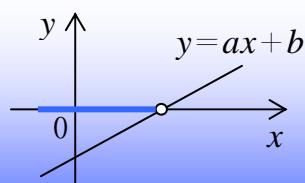



그림 3−10

안같기식 $ax+b>0$의 풀이는 1차식 $y=ax+b$의 그라프가 x축의 웃쪽에 놓이는 x값의 구간이고 안같기식 $ax+b<0$의 풀이는 1차식 $y=ax+b$의 그라프가 x축의 아래쪽에 놓이는 x값의 구간이다.

$ax+b>0$

$ax+b<0$

찾기 두 1차식 $y=-x+1$, $y=\frac{2}{3}x+4$의 그라프를 보고 $-x+1>\frac{2}{3}x+4$로 되는 x값구간들을 구하여라.

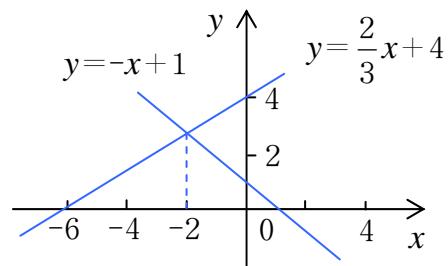
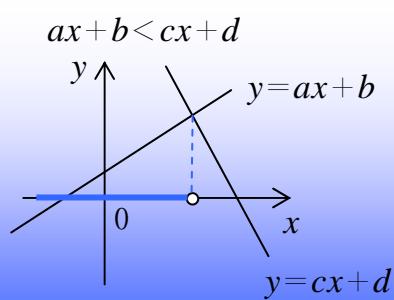
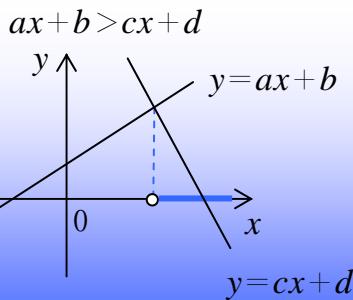



그림 3−11

안같기식 $ax+b>cx+d$의 풀이는 1차식 $y=ax+b$의 그라프가 1차식 $y=cx+d$의 그라프의 웃쪽에 놓이는 x값의 구간이다.

마찬가지로 안같기식 $ax+b<cx+d$의 풀이는 1차식 $y=ax+b$의 그라프가 1차식 $y=cx+d$의 그라프의 아래쪽에 놓이는 x값의 구간이다.

례 1 다음 안같기식을 그라프로 풀어라.

$$1-x>\frac{2}{3}x-4$$

(풀이) $y=1-x$의 그라프가 $y=\frac{2}{3}x-4$의 그라프보다 웃쪽에 놓이는 x의 값구간은 $(-\infty,\ 3)$

따라서 풀이모임 $(-\infty,\ 3)$

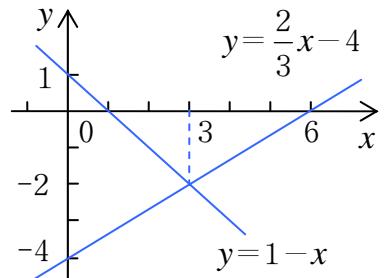



그림 3-12

례 2 안같기식 $|x|>2x-2$를 풀어라.

(풀이) 1) $x\geq 0$이면 $|x|=x$이므로 주어진 안같기식은

$$x>2x-2 \qquad x<2$$

이 경우의 풀이는

$$[0,\ +\infty)\cap(-\infty,\ 2)=[0,\ 2)$$

2) $x<0$이면 $|x|=-x$이므로 주어진 안같기식은

$$-x > 2x - 2 \qquad x < \frac{2}{3}$$

이 경우의 풀이는

$$(-\infty,\ 0) \cap (-\infty,\ \frac{2}{3}) = (-\infty,\ 0)$$

따라서 풀이는

$[0,\ 2) \cup (-\infty,\ 0) = (-\infty,\ 2)$

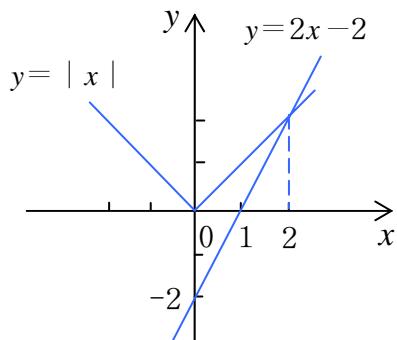
풀이모임 $(-\infty,\ 2)$

그림 3−13

이것을 그라프로 풀어보자.

$y = |x|$의 그라프가 $y = 2x - 2$의 그라프보다 웃쪽에 놓이는 x의 값구간은

$(-\infty,\ 2)$

따라서 풀이모임 $(-\infty,\ 2)$

문 제

1. 그라프에 의하여 다음 안같기식을 풀어라.

 1) $-2x - 2 > 0$ 2) $2x - 7 > x + 1$ 3) $4.8 + x < 3.4x$

2. 다음 안같기식을 풀어라.

 1) $|x - 3| > 0.5x$ 2) $|5 - 2x| < 0.5x$

$y \geq -2x + 8,\ y \leq 3x + 5,\ y \leq -3x + 12$

를 함께 만족하는 점 $(x,\ y)$들은 어떤 도형을 만드는가 실지 그려보아라.

련 습 문 제

1. 그라프에 의하여 다음 방정식을 풀어라.

 1) $6 - x = 2x$ 2) $\frac{2}{3}x + 1 = 2x - \frac{1}{3}$

2. 1차식 $y = -3x + 5$의 그라프를 그리고 다음 모임을 구하여라.

1) $\{x|y=0\}$ 2) $\{x|y>0\}$ 3) $\{x|y<-3\}$

그라프에 의하여 다음 방정식을 풀어라.(3－4)

3. 1) $\frac{1}{5}x+1=0$ 2) $16-2x=2x$

3) $\frac{2}{3}x+1=6-x$ 4) $0.5x+11=4-3x$

4. 1) $|x-2|=6$ 2) $|x-4|=4-x$

다음것을 풀어라.(5－8)

5. 1) $x+5\leq-7$ 2) $\frac{x}{3}-6>\frac{x}{7}-2$

3) $0.8-0.2x<0.5x-0.6$

6. 1) $|x-2|<4$ 2) $|x-3|\geq x$

7. 1) $2x+1>x+5$ 2) $1-x<2x+1$

3) $3x-5\geq x+7$ 4) $4-5x\leq 2-7x$

8. 1) $|x-4|=4$ 2) $|x|+1=-2x+4$

3) $|x-3|>0$ 4) $-2|x+1|\leq\frac{2}{3}x-2$

복 습 문 제

1. 옳은 답을 선택하여라.

1) $\frac{0.3+0.2x}{0.3}$와 $\frac{4x+9}{5}+\frac{5-x}{2}$가 서로 같게 되는 x의 값은 ( )이다.

① 10 ② 9 ③ 8 ④ 7

2) $\frac{x+1}{2}$의 값이 $\frac{5-x}{3}$의 값보다 1만큼 더 크게 되는 x의 값은 ( )이다.

① $\frac{8}{5}$ ② $\frac{13}{5}$ ③ 8 ④ 13

2. 다음 1차식들의 그라프를 그리고 두 직선들이 어떤 자리관계에 있는가를 말하여라.

1) $y=x$와 $y=-x$ 2) $y=3x$와 $y=3x-2$

3) $y=0.5x$와 $y=0.5x-2$

3. 직선 $y=x-3$와 $y=x$는 어떤 자리관계에 있는가? 또 다음의 수모임을 구하여라.

1) $\{x|y=0\}$ 2) $\{x|y>0\}$ 3) $\{x|y<0\}$

4. 직선 $y=3-x$와 $y=-x$는 어떤 자리관계에 있는가? 또 다음 값들의 모임을 구하여라.

1) $\{x|y=0\}$　　2) $\{x|y>0\}$　　3) $\{x|y<0\}$

5. 직선 $y=ax+2$이 점 (−2, 1)을 지난다. 이 직선은 또한 다음 점들을 지나는가?

$$\left(-1,\ \frac{3}{2}\right),\ \left(0,\ \frac{1}{2}\right),\ (0.5,\ 2.25),\ (4,\ 5)$$

6. 직선 $y=2x-1$와 x축에 관해서 대칭인 직선을 그려라.

7. 용수철의 늘음과 그것에 단 추의 질량은 비례관계에 있다. 15g의 추를 달았을 때 용수철의 길이가 18cm였고 30g의 추를 달았을 때는 28cm였다. 추의 질량이 xg, 용수철의 길이를 $y$cm라고 할 때 y를 x로 표시하여라.

8. 위대한 수령 **김일성**대원수님께서는 어린시절에 《배움의 천리길》을 걸으시면서 강계에서 바다오거우(팔도구)에 계시는 부모님들께 《강계무사도착》이라는 전보를 치시였다. 당시 전보문 한자에 3전이였는데 여섯자가 넘으면 1전씩 더 받았다고 한다. 전보 x자의 값은 얼마인가를 1차식으로 표시하여라.

9. 그라프에 의하여 다음 방정식을 풀어라.

1) $2x+1=x+5$　　2) $1-x=2x-1$　　3) $|x-1|=2$

10. 그라프에 의하여 다음 안갈기식을 풀어라.

1) $3x-5>x+7$　　2) $4-5x\leq 2-8x$

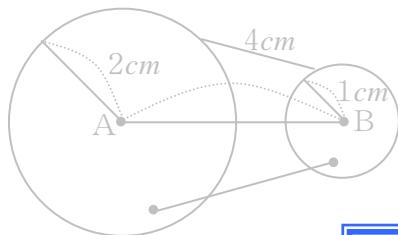
11. 다음 방정식을 풀어라.

1) $|x-2|=2x+3$　　2) $|2x-3|=x+1$

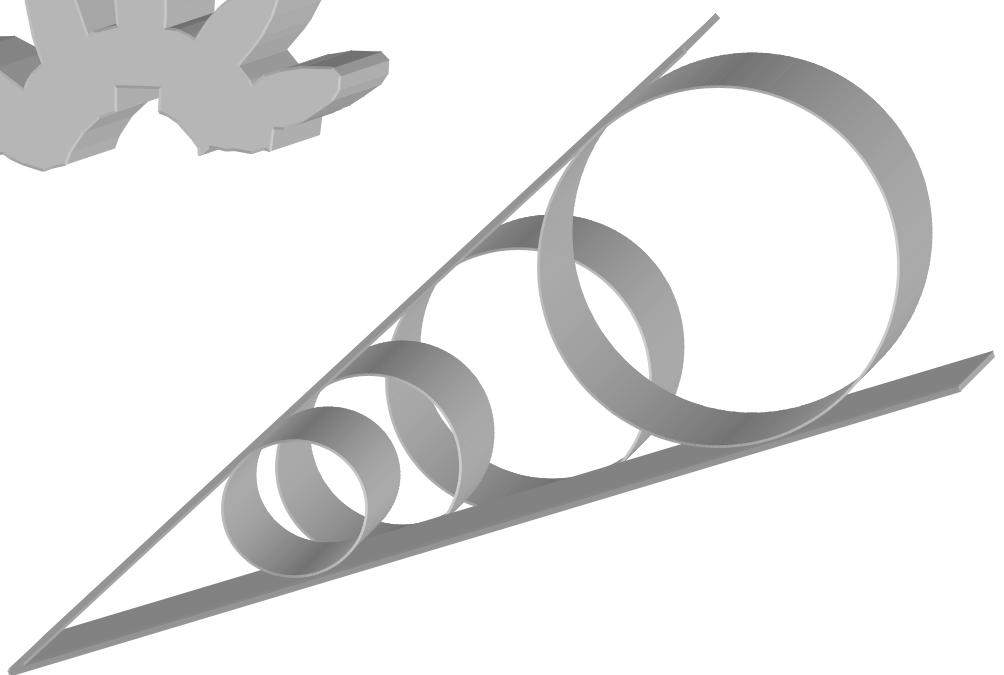
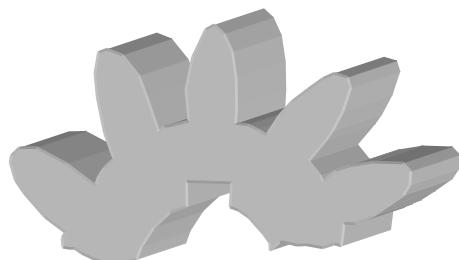
12. 다음 안갈기식을 두가지 방법으로 풀어라.

1) $|2x+1|>3x-2$　　2) $3x>|2x+2|+3$

13. 1차식으로 표시하는 응용문제를 만들고 그것을 풀어라.

제4장. 원

원둘레와 원

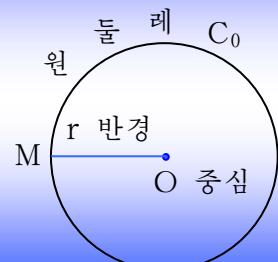
원둘레와 직선, 원과 원의 자리관계

원기둥과 구

제1절. 원둘레와 원

1. 원둘레와 원

원둘레

평면에서 정해져있는 점 O로부터 일정한 거리 r에 있는 점 M들의 모임 C_0을 원둘레라고 부른다.

여기서 점 O를 원둘레의 중심, 중심과 원둘레의 점을 맺는 선분 또는 그 길이를 반경이라고 부른다.

해보기 그림 4−1에서

$d(O, C_0)=r$, $d(O, C_1)<r$, $d(O, C_2)>r$

일 때 점 C_0, C_1, C_2을 찍어라.

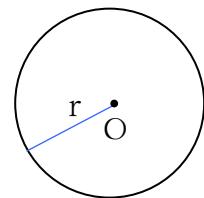
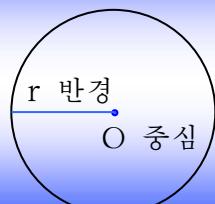



그림 4−1

원

원둘레와 그로 둘러막힌 평면의 부분을 원이라고 부른다.

중심 O, 반경 r인 원(또는 원둘레)을 O(r)와 같이 쓴다.

원에서는 임의의 두 점을 맺는 선분이 원안에 있다. 도형의 임의의 두 점을 맺는 선분이 그 도형에 들어있을 때 이런 도형을 **볼록도형**, 그렇지 않은 도형을 **오목도형**이라고 부른다.(그림 4−2)

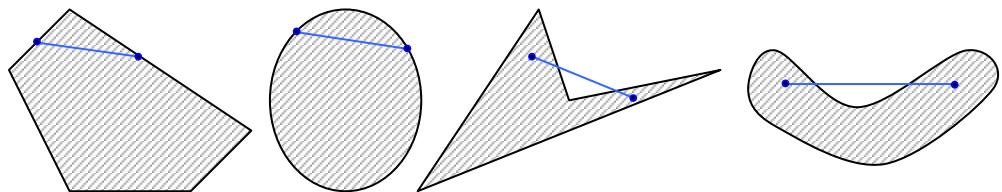
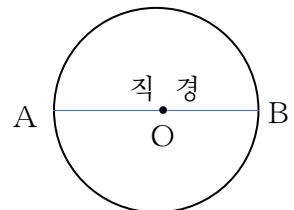
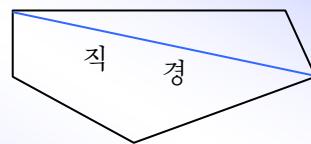



그림 4－2

그림 4－3

원의 두 점을 맺는 선분들가운데서 중심 O를 지나며 두 끝점이 원둘레에 있는 선분 AB가 가장 길다. 이것을 **원의 직경**이라고 부른다.

직경이라는 말은 다른 도형에서도 쓸 때가 있다.

도형에 속하는 두 점을 맺는 선분들가운데서 그 길이가 가장 긴것을 그 도형의 직경이라고 부른다. 직경의 길이를 직경이라고 말할 때도 있다.

1） 교실의 직경은 어느 두 점사이의 거리인가?

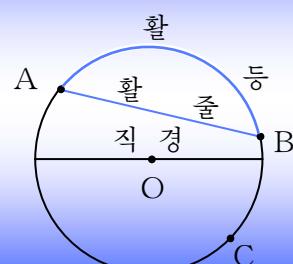
2） 3각형, 4각형을 하나씩 그리고 그의 직경을 구해보아라.

활등과 활줄

두 끝점이 있는 원둘레의 한 부분을 활등이라고 부르고 $\overset{\frown}{AB}$와 같이 쓴다.

활등의 두 끝점을 맺는 선분을 그 활등에 대한 활줄이라고 부른다.

원의 직경은 중심을 지나는 활줄이다.

직경은 반경의 2배이다.

직경에 의하여 나누이는 원의 부분을 **반원**, 원둘레의 부분을 **반원둘레**라고 부른다.

그리고 반원둘레보다 큰 활등은 흔히 다음과 같이 세 글자로 표시한다.

$$\overset{\frown}{ABC}$$

문 제

1. 콤파스를 가지고 그림 4－4의 지도에서 지점 ㄱ으로부터 10km보다 가까운 거리에 있는 지점을 다 찾아라. (그림에서 1cm는 4km이다.)
2. 원에서 활등은 그에 대한 활줄보다 길이가 길다. 왜 그런가?

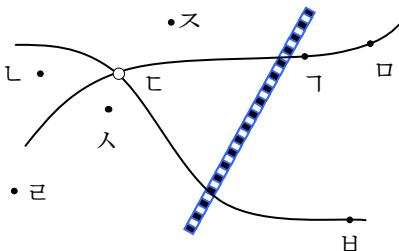
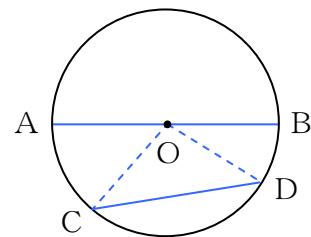



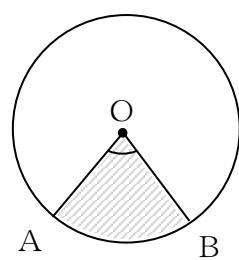
그림 4－4　　　　그림 4－5

3. 그림 4－5를 보고 빈 자리에 알맞는 기호를 써넣어라.

직경 AB…AO＋OB…CO＋OD…활줄 CD　그러므로 직경 AB…활줄 CD

4. 주어진 원둘레에 한 점 A를 정하고 점 A를 끝점으로 하는 직경과 반경의 길이와 같은 활줄을 그어라. 직경과 활줄사이의 각은 몇도인가?
5. 주어진 원둘레에 한 점 P를 정하고 점 P를 끝점으로 하고 반경과 같은 두 활줄을 그어라. 그 두 활줄사이의 각은 몇도인가?
6. 원 O의 활줄 AB의 가운데점 M과 중심 O를 맺으면 OM은 AB에 수직이다. 왜 그런가?
7. 1) 한 원에서 두 활등이 같으면 그에 대응하는 활줄이 같다. 왜 그런가?
   2) 한 원에서 두 활줄이 같으면 그에 대한 활등이 같다고 말할수 있는가?

그림 4－6

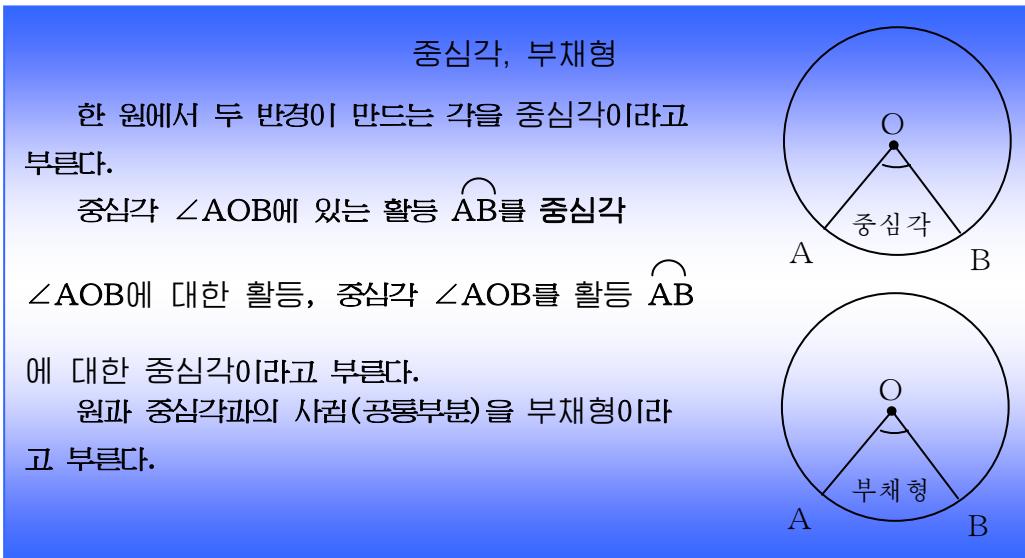
찾기 원 O에서 두 반경 OA와 OB를 그었을 때

1. 이 두 반경에 의하여 각이 몇개 생겼는가?

2. 이 두 반경에 의하여 나누어진 원의 부분에서 부채모양을 찾아보아라.

중심각, 부채형

한 원에서 두 반경이 만드는 각을 중심각이라고 부른다.

중심각 ∠AOB에 있는 활등 $\overset{\frown}{AB}$를 중심각 ∠AOB에 대한 활등, 중심각 ∠AOB를 활등 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 중심각이라고 부른다.

원과 중심각과의 사귐(공통부분)을 부채형이라고 부른다.

원둘레 O의 두 점에 의하여 이루어지는 중심각 ∠AOB와 활등 $\overset{\frown}{AB}$는 2개씩 있다. 앞으로 중심각 ∠AOB, 활등 $\overset{\frown}{AB}$라고 하면 180°보다 작은 각에서 생각하기로 한다.

반원둘레의 한 점 M을 직경 AB의 두 끝점과 맺었을 때 생기는 각을 **직경에 대한 원둘레각**이라고 부른다.

해보기 1. 그림 4−7에서 AB는 직경이다. ∠AMB는 몇도인가? 재여보아라. 또 다른 원둘레각 ∠ANB를 그리고 그 각을 재여보아라.

2. 그림 4−7을 보고 다음의 빈칸에 알맞는 글자를 써넣어라.

△OAM에서 OA=OM이므로 $\angle a=\square$

△OBM에서 OB=□이므로 $\angle b=\angle b_1$

그런데 △AMB의 세 아낙각의 합은

$(\angle a_1+\angle b_1)+\angle a+\angle b=180°$이므로

$(\angle a_1+\angle b_1)+(\angle a_1+\angle b_1)=\square$

$\angle a_1+\angle b_1=\square$

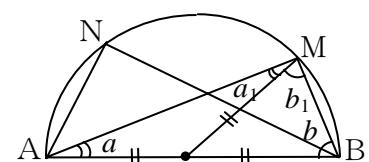



그림 4−7

직경에 대한 원둘레각은 직각이다.

문 제

1. 그림 4－8과 같이 원 O(r)안에 점 C와 D가 있다.

   다음 사실이 옳다고 말할수 있는가?

   1) OC＋OD＞CD

   2) OE＋OF＞OC＋OD

   3) AB＝OE＋OF

   4) AB＞CD

그림 4－8

2. 다음과 같은 직3각형 ABC(∠A＝∠R)를 그려라.

   1) BC＝5cm, ∠B＝37°

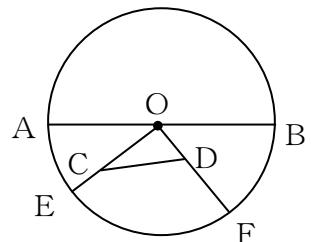
   2) BC＝6.5cm, AB＝4cm

2. 원과 회전, 원의 대칭

그림 4－9와 같이 중심각이 같은 두 부채형 OAB와 OCD가 있다. 부채형 OAB를 점 O주위로 회전이동하여 부채형 OCD에 꼭맞게 겹쳐놓을수 있다.

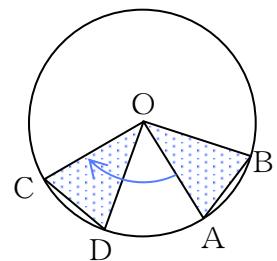



그림 4－9

두 활등 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$에 대한 중심각을 ∠AOB, ∠COD라고 할 때

$$\angle AOB = \angle COD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

알아보기 한 원에서 활등이 2배, 3배로 늘어나면 그에 대한 중심각은 몇배씩 늘어나는가를 알아보아라.

활등과 중심각사이의 관계

한 원에서 중심각의 크기는 그에 대한 활등의 길이에 비례한다.

중심각과 그에 대한 활등사이의 관계 그리고 활등과 그에 대한 활줄사이의 관계로부터 다음과 같은 사실도 알수 있다.

한 원에서 중심각이 서로 같으면 그에 대한 활줄도 서로 같고 또 활줄이 서로 같으면 그에 대한 중심각도 서로 같다.

알아보기 그림 4－10에서 AB＝CD이면 △OAB≡△OCD, OE＝OF라고 말할수 있는가?

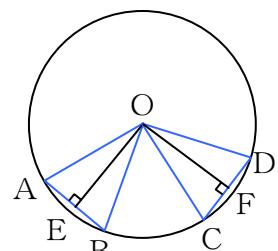



그림 4－10

한 원에서 활줄이 서로 같으면 중심으로부터 그 활줄까지의 거리도 서로 같다.

문 제

1. 그림 4－11에서 다각형 ABCDEF는 바른6각형이다.
   1) ∠AOB는 몇도인가?
   2) 자와 콤파스로 바른6각형을 그리는 방법을 말하여라.
2. 자와 콤파스를 써서 다음과 같은 바른다각형을 그려라.
   바른3각형, 바른4각형, 바른5각형, 바른8각형, 바른12각형

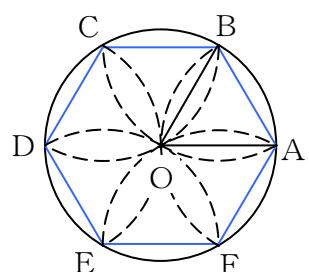



그림 4－11

찾기 직경 XY에 수직이 되는 활줄 AA_1을 긋자.

점 A_1의 XY에 관한 대칭점을 찾아라.

$AH=A_1H$인가?

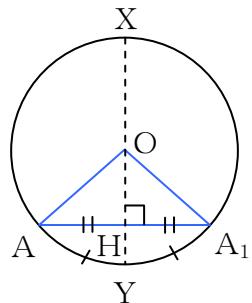



그림 4−12

직경에 수직인 활줄은 그 직경에 의해서 2등분된다.

활줄에 수직인 직경은 그 활줄과 그에 대한 활등을 2등분한다.

한 활줄에 의해서 원은 두 부분으로 나누인다. 이때 매 부분을 **활형**이라고 부른다.

문 제

1. 그림 4−13과 같은 원의 활등 AB를 2등분하여라. 또 4등분하여라.

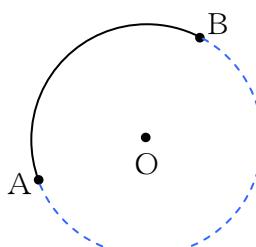
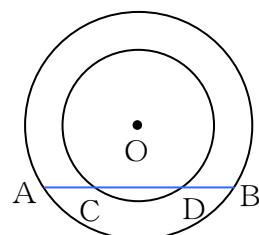



그림 4−13　　그림 4−14

2. 중심 O를 공통으로 가지는 반경이 서로 다른 두 원둘레가 있다. 한 직선이 이 두 원둘레와 사귈 때 그 사귐점을 차례로 A, C, D, B라고 하면 AC=DB라고 말할수 있는가?(그림 4−14)

3. 그림 4－15에서 AB//CD이면 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$라고 말할수 있는가?

4. 활등을 2등분하는 반경은 그 활등에 대한 중심각과 활줄을 2등분한다고 말할수 있는가?

5. 한 원에서 서로 수직이고 길이가 같은 두 활줄이 서로 다른것을 3cm, 7cm 되게 나눈다. 중심에서 활줄까지의 거리를 구하여라.

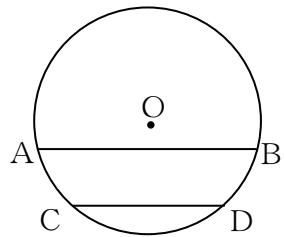



그림 4－15

련습문제

1. 그림 4－16에서 AB=AC, ∠A=40°이다. ∠AOB, ∠AOC, ∠BOC는 각각 얼마인가?

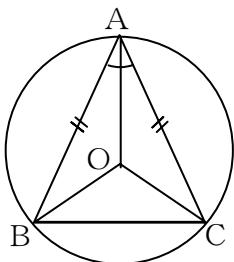



그림 4－16

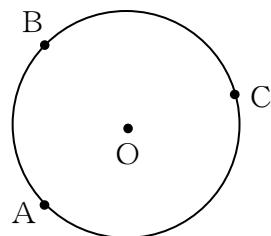



그림 4－17

2. 그림 4－17과 같은 원둘레 O가 있다. $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{AC}=3:4:5$되는 점 A, B, C를 찍어라.

3. 원둘레 O의 활등 $\overset{\frown}{AB}$가 있다.(그림 4－18) 활줄 AB의 수직2등분선과 원둘레와의 사귐점을 X, Y라고 할 때 ∠AXB=64°이면 ∠AOY는 몇도인가?

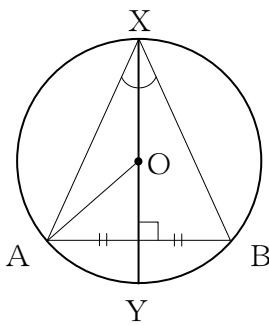



그림 4－18

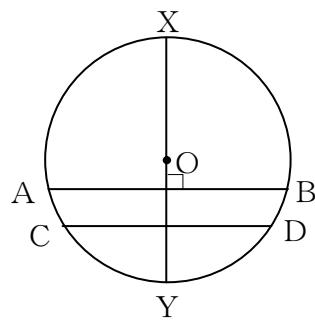



그림 4－19

4. 원 O에 평행인 두 활줄 AB, CD가 있다.(그림 4－19) AB⊥XY인 직경 XY는 활줄 CD를 2등분한다고 말할수 있는가?

5. 원 O와 그안에 점 A가 있다. 점 A에서 2등분 되는 활줄 CD를 그어라.

제2절. 원둘레와 직선, 원과 원의 자리관계

1. 원둘레와 직선의 자리관계

해보기 원둘레 O 및 그와 사귀는 직선 ℓ이 있다. 여기서 ℓ⊥OT이다. 이제 그림 4－20과 같이 직선 ℓ을 평행이동하여보아라.

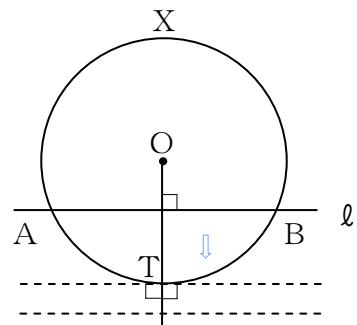
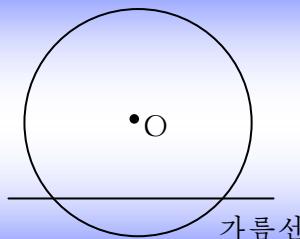
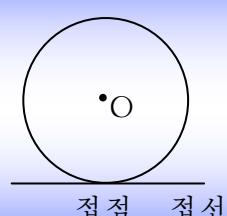
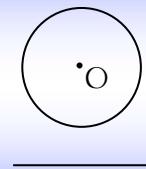
이때 직선과 원둘레가 공통으로 가지는 점의 개수는 어떻게 달라지겠는가?

그림 4－20

① 원둘레와 직선이 두 점을 공통으로 가지는 경우

이때 직선과 원둘레는 **사귄다**고 말하며 이 직선을 원(또는 원둘레)의 **가름선**이라고 부른다.

② 원둘레와 직선이 한 점만을 공통으로 가지는 경우

이때 이 직선은 원(또는 원둘레)에 **접한다**고 말하며 이 직선을 원의 **접선**, 공통으로 가지는 점을 **접점**이라고 부른다.

③ 원둘레와 직선이 떨어져있는 경우

알아보기 원 O(r)와 직선 ℓ이 있다. 중심 O로부터 ℓ에 그은 수직선의 밑점을 M이라고 하면 다음과 같은 경우에

1) $OM < r$
2) $OM = r$
3) $OM > r$
직선과 원의 자리관계를 알아보아라.

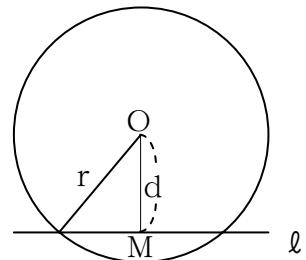



그림 4-21

원의 중심으로부터 직선까지의 거리를 d, 원의 반경을 r라고 할 때

1) $d < r \Leftrightarrow$ 원과 직선은 사귄다.
2) $d = r \Leftrightarrow$ 원과 직선은 접한다.
3) $d > r \Leftrightarrow$ 원과 직선은 떨어져있다.

원둘레 O의 한 점 T를 지나며 반경 OT에 수직인 직선은 그 원에 접한다. 원의 접선은 접점에 그은 반경에 수직이다.

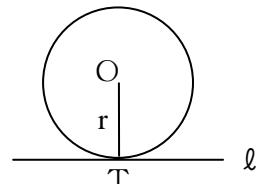



그림 4-22

문 제

1. AB를 직경으로 하는 원이 있다.(그림 4-23) 원둘레의 점 C와 A, C와 B를 각각 맺었을 때 $\angle CAB = 60°$이면 $\triangle AOC$는 바른3각형이다. 왜 그런가?

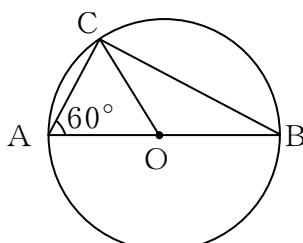



그림 4-23

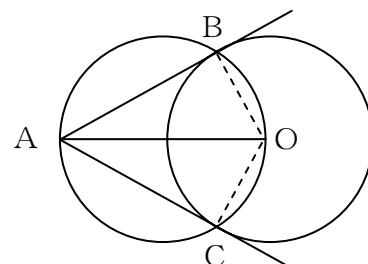



그림 4-24

2. 원 O밖에 점 A가 있다. OA를 직경으로 하는 원둘레를 그리고 두 원둘레가 사귀는 점을 B, C라고 하면 직선 AB, AC는 원 O에 대한 접선이다.(그림 4-24) 왜 그런가? 또 이것을 써서 원밖의 점에서 원에 접선을 긋는 방법을 말하여라.

알아보기 그림 4−25에서처럼 점 A에서 원 O에 두 접선 AT, AT_1을 그었다.

1. 점 T, T_1은 직선 OO_1에 관하여 서로 대칭인가?
2. $AT=AT_1$, $\angle TAO=\angle T_1AO$인가?

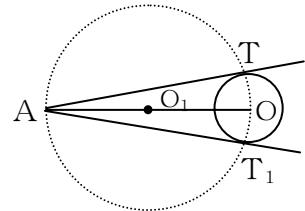



그림 4−25

각의 두 변에 한 원이 접할 때

각의 정점에서 접점까지의 거리는 같다.

정점과 원의 중심을 맺는 직선은 이 각을 2등분한다.

문 제

그림 4−26과 같이 ∠XOY의 두 변에 접하는 여러개의 원이 있다. 이 원의 중심들은 한 직선에 있다고 말할수 있는가?

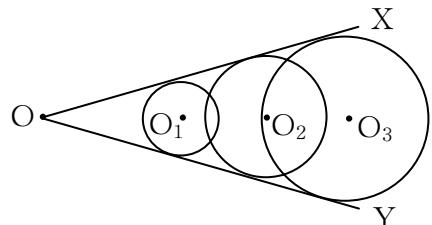



그림 4−26

알아보기 원의 가름선 AB가 있다. 점 B가 원둘레를 따라 움직이여 점 A에로 점점 가까이 가서 점 A와 마주치면 가름선 AB는 어떤 자리에 가게 되겠는가?(그림 4−27)

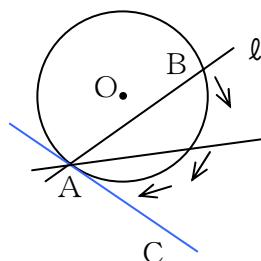
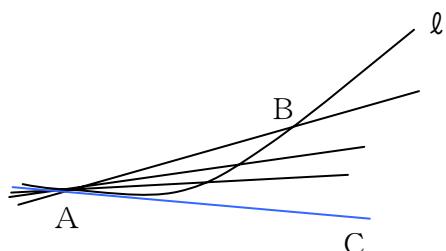



그림 4−27　　　　그림 4−28

원의 접선뿐아니라 임의의 곡선의 접선도 이런 식으로 생각한다.(그림 4−28)

곡선 ℓ이 한 직선과 두 점 A, B에서 사귄다고 하자. 점 B가 곡선을 따라 A에로 가까이 가서 점 A와 마주칠 때 직선 AB는 어떤 직선 AC의 자리에 가게 될것이다.

직선 AC를 점 A에서의 **곡선 ℓ의 접선**이라고 부른다. 이때 ∠BAC를 **직선 AB와 곡선 ℓ사이의 각**이라고 부른다.

문 제

1. 그림 4－29의 점 B에서 그은 접선과 직경 AB사이의 각은 얼마인가?

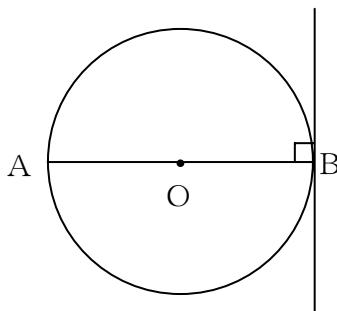
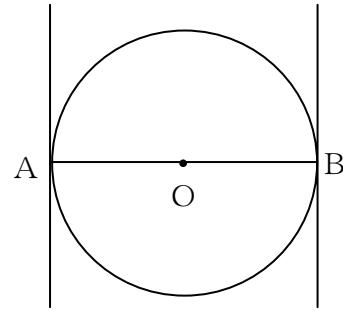



그림 4－29　　　　그림 4－30

2. 원 O가 있다. 이 원의 직경 AB의 두 끝점에서 이 원에 접선을 그었다. 이 두 접선은 평행이라고 말할수 있는가?(그림 4－30)
3. 직선 ℓ밖에 한 점 O가 있다. 점 O를 중심으로 하고 직선 ℓ에 접하는 원을 그려라.
4. 그림 4－31과 같이 원 O와 직선 ℓ이 있다. 직선 ℓ에 평행이면서 원 O에 접하는 직선을 그어라.

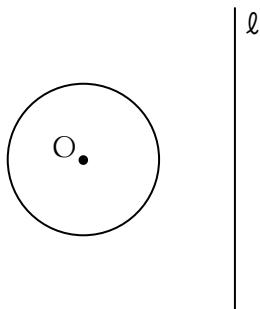
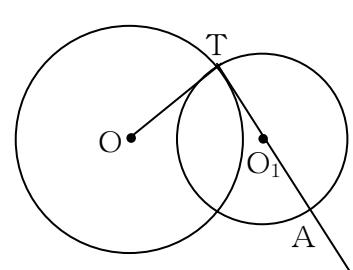



그림 4－31　　　　그림 4－32

5. 두 원둘레의 사귐점에서 매 원에 접선을 그었을 때 두 접선사이의 각을 그 사귐점에서 **두 원둘레사이의 각**이라고 부른다. 원둘레 O의 점 T에서 이 원에 접선 TA를 긋는다. TA에 점 O_1을 잡고 O_1T를 반경으로 하는 원둘레를 그린다. 이때 두 원둘레 O, O_1은 몇도의 각을 이루는가?(그림 4－32)

2. 두 원의 자리관계

반경이 다른 두 원의 중심 O, O_1이 직선 ℓ에 있다. 이제 원 O_1의 중심이 ℓ에 놓이도록 하면서 원 O_1을 원 O쪽으로 평행이동하여보아라. 두 원의 자리관계에는 어떤 경우들이 있겠는가?

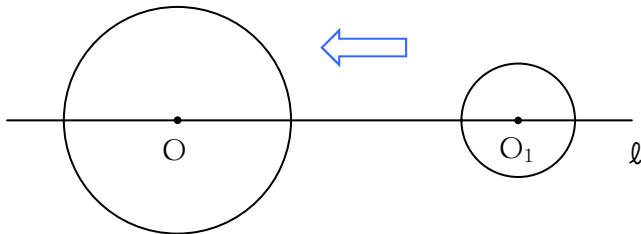
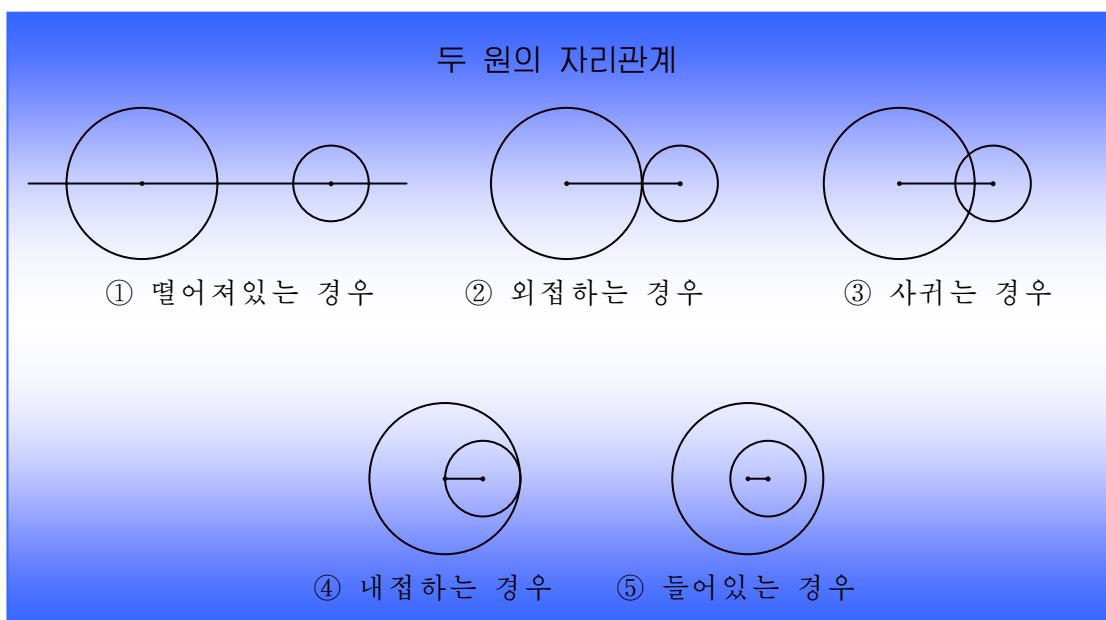



그림 4－33

① 떨어져있는 경우
② 한 원이 다른 원의 바깥에 있으면서 한 점만을 공통으로 가지는 경우－**외접**하는 경우
③ 사귀는 경우
④ 한 원이 다른 원의 안낙에 있으면서 한 점만을 공통으로 가지는 경우－**내접**하는 경우
⑤ 한 원이 다른 원안에 들어있는 경우

1. 두 원둘레가 사귀면 그 사귐점들은 두 중심을 지나는 **중심선**이라고 부르는 직선에 관하여 대칭인가?

2. 두 원둘레가 접해있으면 그 접점은 반드시 그 두 중심을 지나는 직선에 있다고 말할수 있는가?

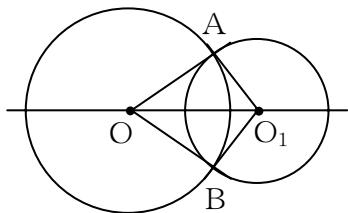
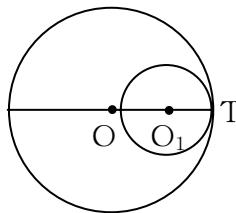



그림 4－34　　　　그림 4－35

두 원 O, O_1이 사귀면 두 사귐점은 중심선 OO_1에 관하여 대칭이다.

두 원 O, O_1이 서로 접하면 접점은 중심선 OO_1에 놓인다.

문 제

1. 반경이 r, $r_1(r>r_1)$인 두 원 O, O_1이 있다. 여기서 $OO_1=d$이다.

1) 두 원이 떨어져있을 때 $r+r_1$과 d는 어느것이 크겠는가?(그림 4－36)

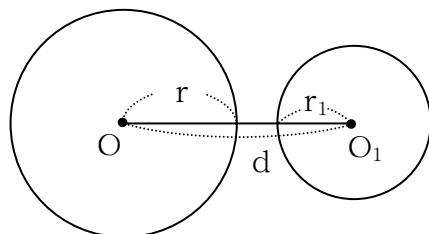



그림 4－36

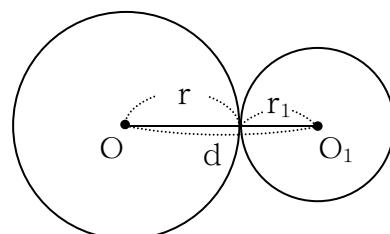



그림 4－37

2) 두 원이 외접할 때 $r+r_1$과 d사이에는 어떤 관계가 있겠는가?(그림 4－37)

3) 두 원이 사귈 때에는 $d<r+r_1$이라고 말할수 있는가?(그림 4－38)

2. 반경이 각각 2cm, 1.5cm, 1cm인 세 원 O_1, O_2, O_3이 둘씩 서로 외접하고있다. $\triangle O_1O_2O_3$의 세 변의 길이를 구하여라.

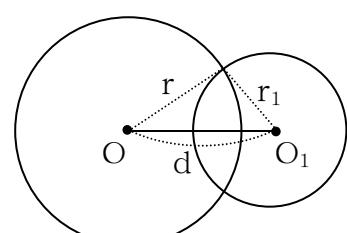



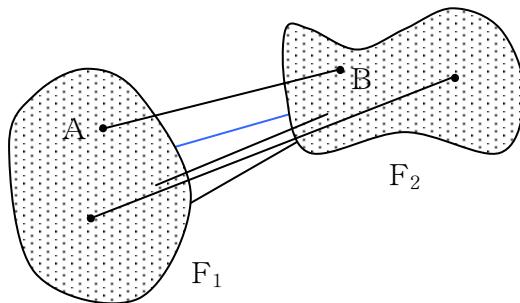
그림 4－38

알아보기 그림 4－36과 4－37에서 두 원의 점들사이의 거리가운데서 제일 작은것은 얼마인가?

두 점모임 F_1, F_2가 있을 때 F_1의 점 A와 F_2의 점 B를 맺는다.(그림 4－39)

이런 선분들의 길이가운데서 가장 작은것을 **두 점모임 F_1, F_2사이의 거리**라고 부르고 $d(F_1, F_2)$와 같이 표시한다.

그림 4－39

문 제

1. 점 A에서 이 점을 지나지 않는 직선에 그은 수직선분 AH의 길이가 왜 점 A에서 직선 ℓ까지의 거리로 되는가?(그림 4－40)

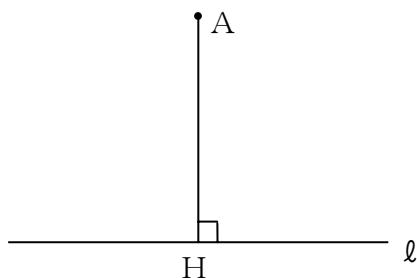
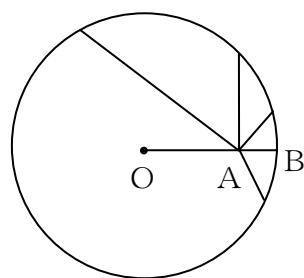



그림 4－40　　　　그림 4－41

2. 원 O와 그안에 점 A가 있다.(그림 4－41) 선분 OA를 A쪽으로 늘여서 원둘레와 사귀는 점을 B라고 하자. 이때 AB의 길이를 점 A에서 원둘레 O까지의 거리라고 말할수 있는가?
3. 1) 두 평행직선 ℓ, ℓ_1이 있다.(그림 4－42) 여기서 어떤 선분의 길이가 ℓ, ℓ_1사이의 거리로 되는가?

   2) 그림 4－43과 같은 두 원 A, B사이의 거리를 말하여라.

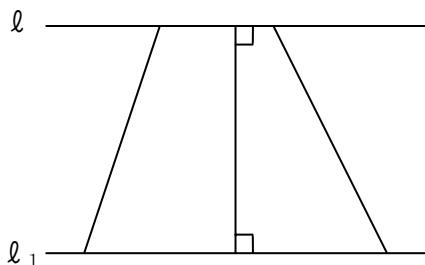



그림 4－42

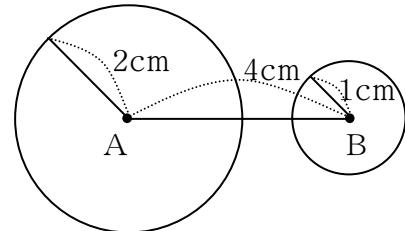
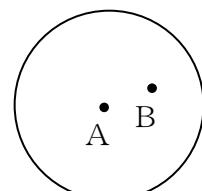
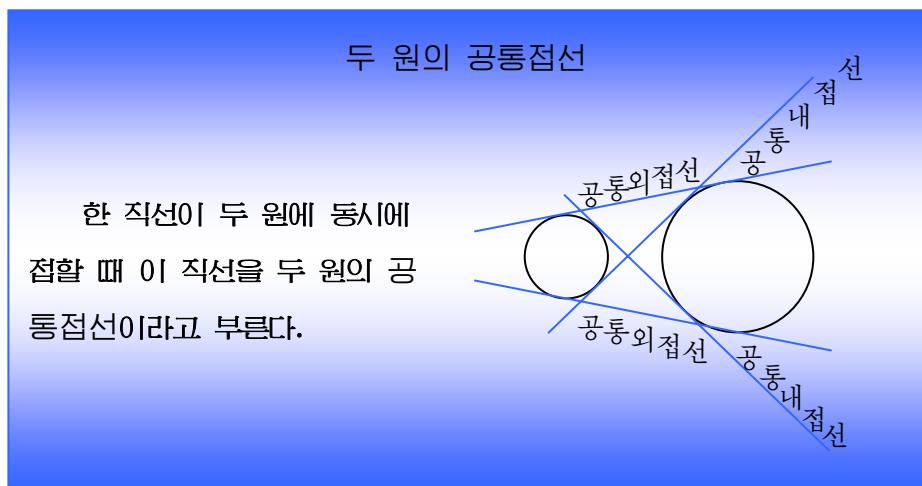



그림 4－43

4. 그림 4－44에서 원 A의 반경은 10cm이고 AB＝7cm라고 하자. 점 B에서 원둘레 A, 원 A, 점 A까지의 거리는 각각 얼마인가?
5. 반경 2.5cm, 1.5cm인 두 원의 중심사이의 거리는 0.5cm이다. 이 두 원사이의 거리는 얼마인가? 또 이 두 원둘레사이의 거리는 얼마인가?

그림 4－44

두 원의 공통접선

한 직선이 두 원에 동시에 접할 때 이 직선을 두 원의 공통접선이라고 부른다.

공통외접선
공통내접선
공통외접선
공통내접선

두 원이 공통접선의 한쪽에만 놓일 때 이 공통접선을 **공통외접선**, 두 원이 공통접선의 량쪽에 놓이면 이 공통접선을 **공통내접선**이라고 부른다.

두 원이 떨어져있을 때 공통외접선과 공통내접선은 각각 2개씩 있다.

문 제

1. 두 원이 외접할 때 공통외접선과 공통내접선은 몇개씩이겠는가?(그림 4－45)

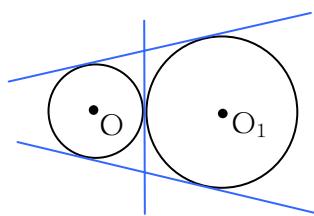
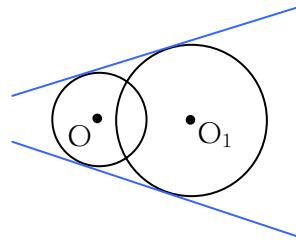



그림 4－45　　　　　　그림 4－46

2. 두 원이 사귈 때와 내접할 때에는 공통외접선과 공통내접선이 몇개씩이겠는가?(그림 4－46)
3. 직선 ℓ이 두 원 O, O_1과 각각 점 A, B에서 접하면 $OA//O_1B$이다. 왜 그런가?(그림 4－47)

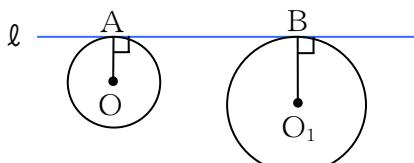



그림 4－47

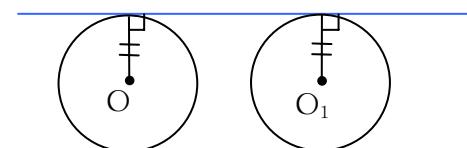



그림 4－48

4. 반경이 같은 두 원 O, O_1이 있다.(그림 4－48) 이 두 원의 공통외접선은 OO_1에 평행이라고 말할수 있는가?
5. 그림 4－49에서 ℓ, ℓ_1은 원 O, O_1의 공통외접선이고 A, B, A_1, B_1은 접점들이다. $AB=A_1B_1$이라고 말할수 있는가? 원 O와 O_1의 반경이 같을 때는 어떤가?

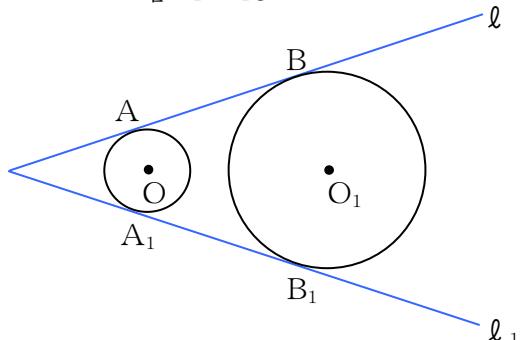



그림 4－49

3. 실천에서 원

물체가 운동할 때 그 물체의 점들가운데는 직선운동이나 원운동을 하는것도 있고 또 이러한 운동이 한꺼번에 이루어져 보다 복잡한 운동을 하는것도 있다.

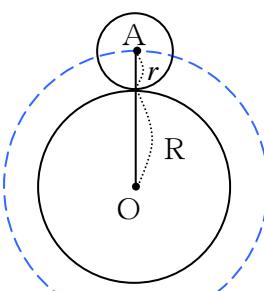



그림 4－50

반경이 R인 원 O와 외접하면서 굴러가는 반경이 r인 원 A는 늘 일정한 길이를 유지하면서 또 원의 중심은 한 원둘레를 그리면서 움직인다.(그림 4-50)

알아보기 그림 4-51에서 EF는 홈이고 B는 이 홈을 따라 움직이게 되여있다. 또 AC, BC, CD의 길이는 다 a와 같고 EF는 $2a$와 같다. B가 홈 EF를 따라 왔다갔다할 때

그림 4-51

1. ∠BAD는 늘 90°이다. 왜 그런가?
   그림 4-52를 보고 말하여라.
2. 점 C는 원의 활등에서 움직인다고 말할수 있는가?(그림 4-53)

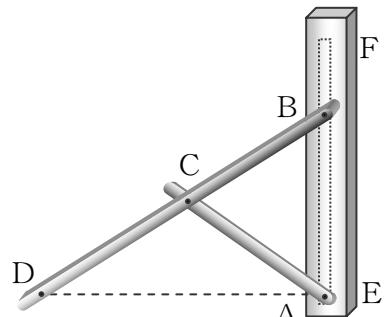
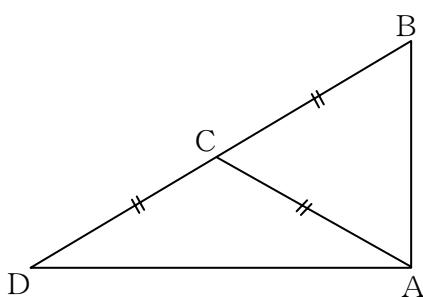
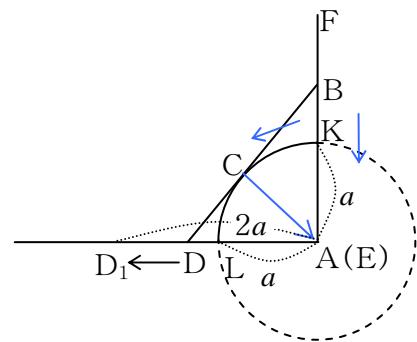



그림 4-52 그림 4-53

점 B가 홈 EF를 따라 왔다갔다할 때 점 C는 그림 4-53에 표시된 활등(원둘레의 $\frac{1}{4}$)에서 왔다갔다하고 점 D는 길이가 $2a$인 선분 AD_1에서 왔다갔다한다.

즉 점 B가 EF를 따라 왔다갔다할 때 점 C와 D는 각각 활등 $\overset{\frown}{KL}$, 선분 AD_1을 따라 움직인다.

① 비레나사선

그림 4-54에서 반직선 OX는 점 O를 중심으로 하여 매초 45°씩 돌아간다. 또 반직선에 있는 점 P는 점 O로부터 시작하여 OX에서 매초 1cm씩 같은 속도로 X쪽으로 운동하고있다. 이 두 운동을 동시에 할 때 점 P는 그림 4-55와 같은 선을 따라 운동하게 된다. 이런 모양의 곡선을 **비레나사선**이라고 부른다.

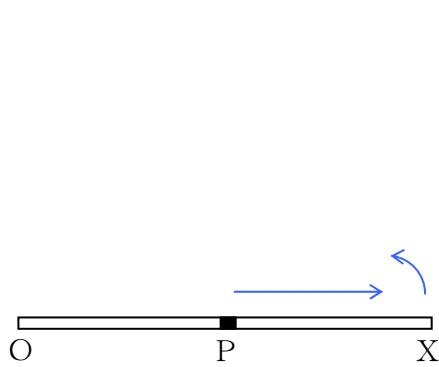
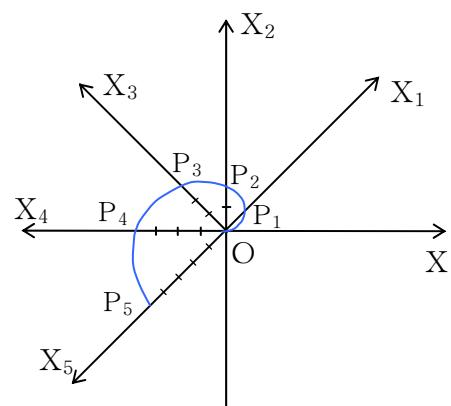



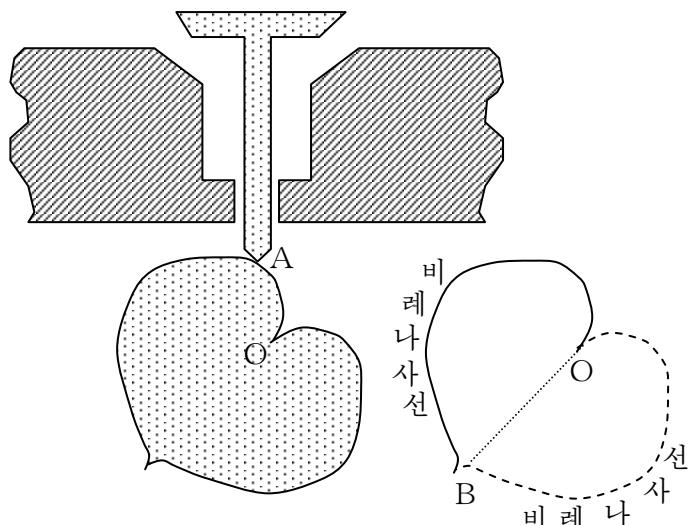
그림 4－54 그림 4－55

비레나사선은 기계나 기구에 리용된다. 그림 4－56에서 B는 두 비레나사선을 대칭되게 맞붙여놓은 판이고 A는 아래우로 움직이게 되여있다.

판 B가 O를 중심으로 하여 같은 속도로 돌면 A도 같은 속도로 아래우로 운동한다.

그림 4－56

곡선을 이와 같이 리용한 기구를 **캄기구**라고 부른다.

캄기구는 기계에서 널리 쓰인다.

② 원의 풀린선

반듯한 면에 놓이며 고정된 원판에 실이 감겨있다. 처음에 실끝이 점 A에 있다고 하자. 실을 팽팽이 당긴채로 풀어나가자.

이때 실의 끝점이 그리는 선을 **원의 풀린선**이라고 부른다.(그림 4－57)

실끝에 연필을 매고 원의 풀린선을 그렸을 때 매 순간에 풀린 실은 원의 접선으로 된다. 그림 4-58에서 보는것처럼 점 A에서 점 B_1까지 풀렸다고 하자.

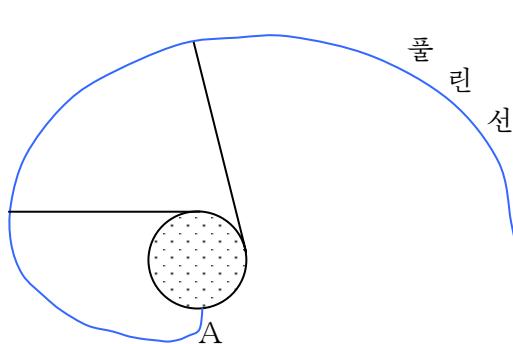
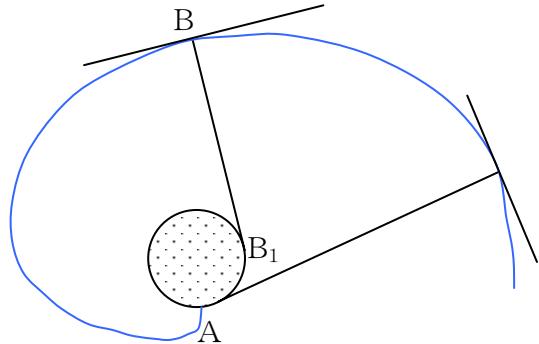



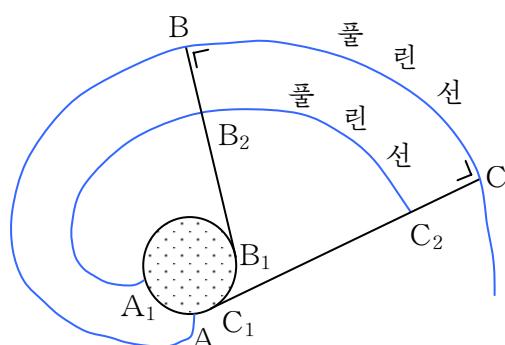
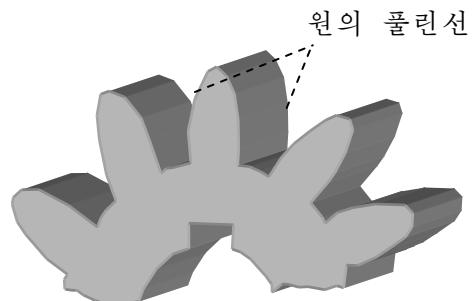
그림 4-57 그림 4-58

실끝이 B에 이르렀다면 (활등 $\overset{\frown}{AB_1}$의 길이)=(선분 BB_1의 길이)이다.

그리고 원의 매 점에서의 접선이 원의 풀린선과 이루는 각은 모두 90°이다. 하나의 원에 대해서도 풀린선을 여러개 그릴수 있다. 실의 끝점이 원둘레의 어떤 점에 있는가에 따라 여러개의 풀린선이 그려진다.(그림 4-59)

원의 풀린선은 치차의 이발곡선으로 쓰인다. 기계에서 쓰이고있는 치차는 이런 모양을 하고있는것이 많다.(그림 4-60)

그림 4-59 그림 4-60

문 제

1. 직선 ℓ로 반경 r인 원이 굴러가고있다. 이 원의 중심이 지나가는 자리의 길을 그려라.(그림 4-61)

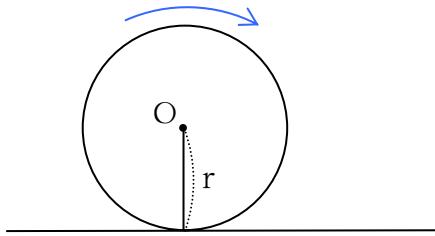
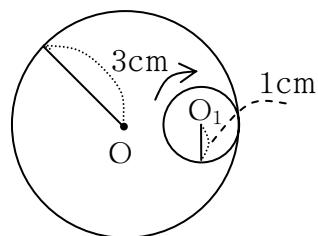



그림 4－61　　　그림 4－62

2. 반경 3cm인 원 O와 내접하면서 굴러가는 반경이 1cm인 원 O_1의 중심이 지나가는 자리의 길을 그려라.(그림 4－62)

3. 그림 4－63에서 반직선 OX는 O를 중심으로 매초 30°씩 시계바늘이 돌아가는것과 반대방향으로 돌아가고 점 P는 O로부터 시작하여 OX에서 매초 0.5cm씩 같은 속도로 운동한다고 하자. 이 두 운동이 동시에 진행되면서 반직선 OX가 한바퀴 돌아갈 때 점 P가 그리는 곡선을 그려라.(그림 4－64)

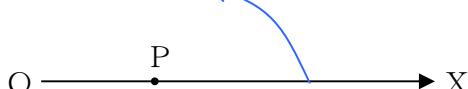
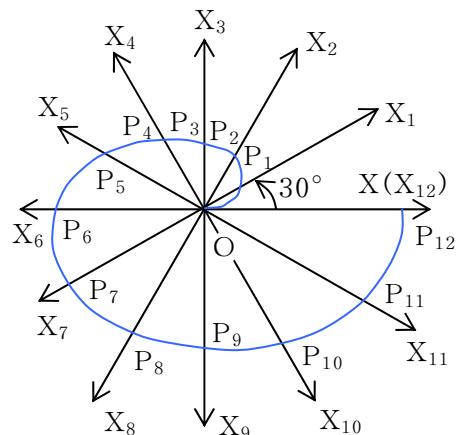



그림 4－63　　　그림 4－64

련 습 문 제

1. 두 변이 4cm, 5cm인 직4각형모양의 판이 있다. 이 판에서 가장 큰 원을 오려내려고 한다. 어떻게 오려내야 하겠는가?

2. 그림 4－65와 같이 원 O와 활등 $\overset{\frown}{AB}$가 있다. 활줄 AB에 평행인 접선 TC를 그었다. T가 접점일 때 $\overset{\frown}{AT}=\overset{\frown}{BT}$라고 말할수 있는가?(T를 지나는 직경을 긋고 생각하여라.)

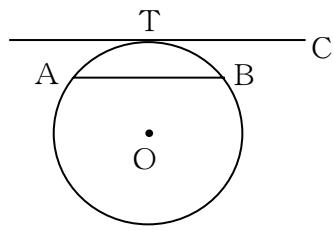



그림 4－65

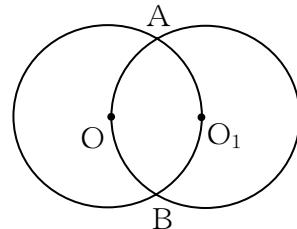



그림 4－66

3. 그림 4－66과 같이 반경이 같은 두 원둘레 O, O_1이 서로 중심을 지나면서 점 A, B에서 사귀고있다. 4각형 $AOBO_1$은 어떤 4각형인가?

4. 두 원둘레 O, O_1이 두 점 A, B에서 사귄다. 선분 AB는 직선 OO_1에 의하여 수직2등분된다고 말할수 있는가?(그림 4－67)

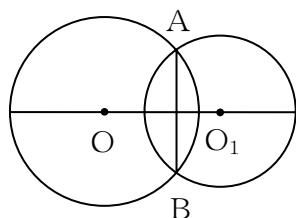



그림 4－67

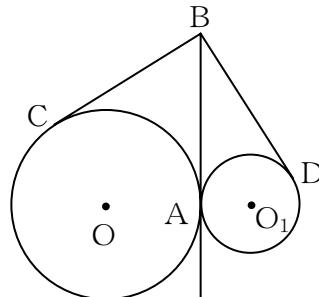



그림 4－68

5. 두 원 O, O_1이 점 A에서 외접하고있다. A를 지나는 공통접선의 점 B에서 두 원에 접선을 긋고 그 접점을 각각 C, D라고 할 때 BC＝BD이다. 왜 그런가?(그림 4－68)

6. 그림 4－69에서 막대기 AB는 A를 중심으로 돌수 있게 되여있고 막대기 BC는 점 B를 중심으로 돌수 있게 되여있다. 이 두 운동이 동시에 진행될 때 점 C는 어떤 범위안에서 운동하겠는가?

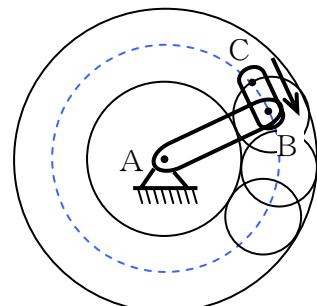



그림 4－69

제3절. 원기둥과 구

1. 원기둥

알아보기 평면 α에 원 O와 수직선분 OO_1이 있다.

원 O를 OO_1방향으로 OO_1의 길이만큼 평행이동해갈 때 둥근기둥모양의 도형이 생기는데 이것을 원기둥이라고 부른다.

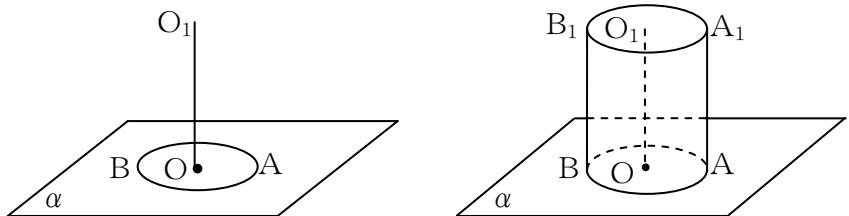



그림 4－70

1. 원 O≡원 O_1이겠는가?
2. 원 O의 점 A가 옮겨가 생긴 선분 AA_1은 다른 선분 BB_1과 같겠는가?

알아보기 직4각형 ABCD를 AB를 축으로 한바퀴 돌릴 때 생기는 도형도 원기둥인가를 알아보아라.

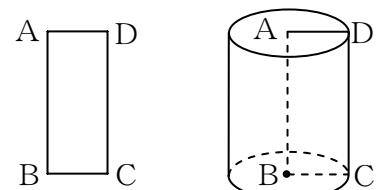
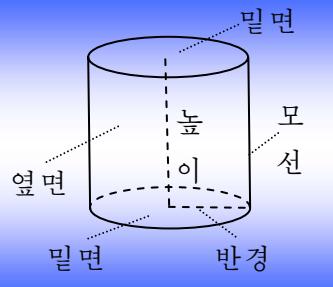



그림 4－71

직4각형을 한 직각변을 축으로 한바퀴 돌렸을 때 생기는 도형을 원기둥이라고 부른다.

원기둥에서 두 밑면은 합동이다.

밑면
높이
모선
옆면
밑면
반경

례 1 밑면의 반경이 2cm, 모선의 길이가 4cm인 원기둥을 두 밑면의 둘레를 따라 자르고 한 모선을 따라 잘라서 펴놓으면 그림 ㄴ)과 같다. 이때 그림 ㄴ)을 **원기둥의 펼친그림**이라고 부른다.

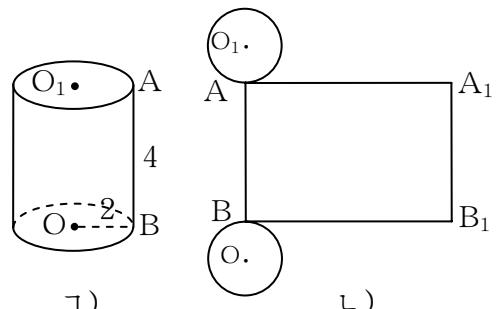



그림 4－72

펼친그림에서 $AB=A_1B_1$은 원기둥의 모선과 같고 $AA_1=BB_1$은 원기둥의 밑면의 둘레와 같다.

례 2 두터운 종이장으로 밑면의 반경이 3cm, 밑면의 둘레의 길이가 18.8cm, 모선이 4cm인 원기둥을 만들어라.

(풀이) 두터운 종이에서 그림과 같이 반경이 3cm인 두 원을 오려내고 변이 4cm, 18.8cm인 직4각형을 오려낸다.
다음 그림과 같이 직4각형을 원기둥의 옆면이 되게 말아서 붙이고 두 원판을 붙이면 된다.

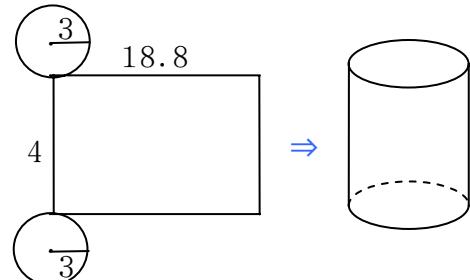



그림 4-73

문 제

원기둥의 옆면의 두 점 A, B가 있다. A와 B를 맺는 선가운데서 제일 짧은 선을 찾아라.(그림 4-74)
A를 지나는 모선에서 잘라 펼친그림을 그리고 생각해보아라.

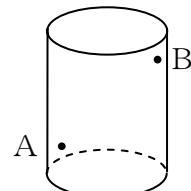
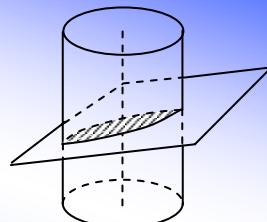



그림 4-74

원기둥의 높이에 수직인 방향으로 원기둥을 자르면 자름면은 밑면과 같은 원이다.

1) 만일 높이에 수직이 아닌 방향으로 자를 때도 원이 생기겠는가?

2) 이때 자름면의 면적과 밑면의 면적을 비교하여라.

2. 구

알아보기 반원(원의 절반)을 직경 AB를 축으로 한바퀴 돌릴 때 생기는 공모양의 도형을 **구**라고 부른다.

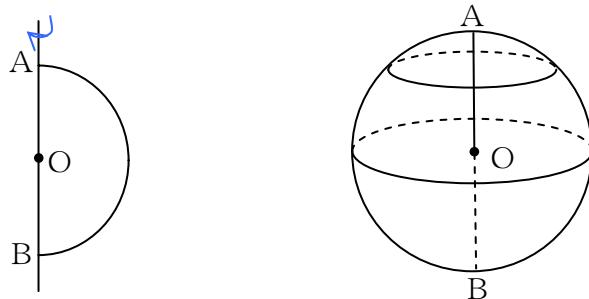
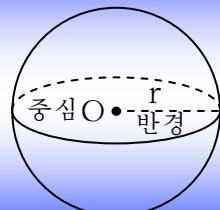



그림 4－75

1) 점 O에서 구의 겉면까지의 거리가 다 같은가를 알아보아라.
2) 구를 어떤 평면으로 자르면 늘 원이 생긴다고 말할수 있는가?

공간에서 한 점 O로부터 같은 거리 r에 있는 점들의 모임을 구면이라고 부르고 구면으로 둘러막힌 도형을 구라고 부른다.

중심이 O, 반경이 r인 구(또는 구면)를 O(r)로 표시한다. 구를 어떤 평면으로 잘라도 늘 원이 얻어진다.

(주의) 구면의 펼친그림은 얻을수 없다.

례 구에서 구의 중심을 지나는 평면으로 자를 때 생기는 원은 구의 중심을 지나지 않는 평면으로 자를 때 생기는 원보다 크다.

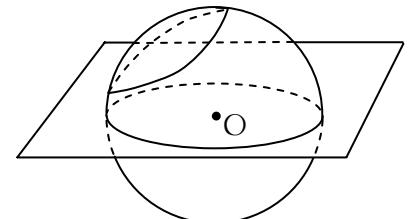



그림 4－76

그리하여 구의 중심을 지나는 자름면의 원을 큰원, 구의 중심을 지나지 않는 자름면의 원을 작은원이라고 부를 때도 있다.

문 제

구 O(3)을 평면우에 올려놓았다. 이때 면 α까지의 거리를 구하여라.

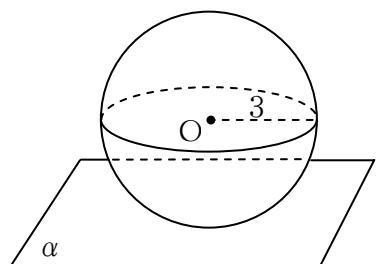
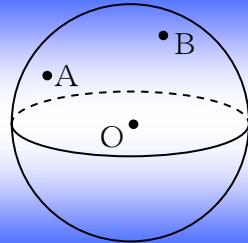



그림 4－77

구면에 두 점 A, B가 있다. 구면에서 A와 B를 맺는 선가운데서 길이가 제일 짧은 선은 어느 선이겠는가?

련 습 문 제

1. 구 O(5)와 밑면의 반경이 3인 원기둥이 한 점에서 접해있다. 원기둥의 높이 O_1O_2와 구의 중심 O사이의 거리를 구하여라.(그림 4—78)

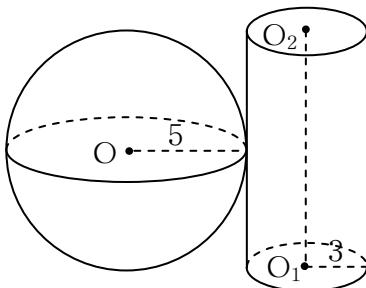
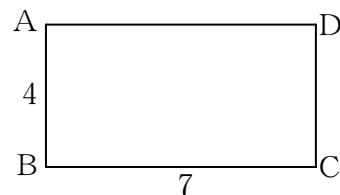



그림 4—78　　　　그림 4—79

2. 구 O(8)과 $O_1(12)$가 한 점에서 접해있다. O, O_1사이의 거리를 구하여라.
3. 두 변이 4cm, 7cm인 직4각형을 말아서 원기둥의 옆면을 만드는 방법은 몇가지인가? 이때 두 원기둥의 높이, 밑면의 둘레는 얼마인가?(그림 4—79)

복 습 문 제

1. 그림 4—80과 같이 원 O와 직경 XY가 있다. 활줄 AB와 CD는 O에서 같은 거리에 있으면서 XY에 각각 수직이다. 4각형 ABCD는 어떤 4각형인가?
2. 바른4각형 ABCD의 정점 A, B, D를 중심으로 하고 이 바른4각형의 한 변의 길이를 반경으로 하는 원을 그릴 때 바른4각형안의 사귐점을 P, Q라고 하면 3각형 CPQ는 어떤 3각형인가?

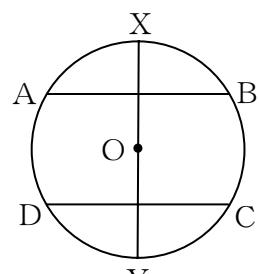



그림 4—80

3. 원의 중심 O와 활줄 AB의 가운데점 M을 맺는 직선 OM은 그 활줄 AB에 수직이다. 왜 그런가?

4. 한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 활줄은 같다. 왜 그런가?

5. 한 원에서 직경이 아니면서 서로 같은 두 활줄은 그 활줄들의 가운데점을 맺는 직선과 같은 각을 이룬다. 왜 그런가?

6. 원 O를 하나 그리고 두 직경 AB, CD를 그어라. 이때 4각형 ACBD는 무슨 4각형으로 되는가?

7. □안에 알맞는 말을 써넣어라.

   1) 원의 접선은 □에 그은 반경에 수직이다.

   2) 두 원이 서로 접할 때 접점은 □선에 놓인다.

   3) 원에서 활줄에 수직인 □은 그 활줄을 2등분한다.

   4) 원에서 활줄의 □선은 원의 중심을 지난다.

8. 서로 떨어진 두 원 O_1(3cm), O_2(3cm)를 그리고 공통접선을 그어라.

9. 그림 4-81에서 점 M은 두 원 O, O_1의 공통접선의 사귐점이다.

   1) 점 O, O_1은 각 M의 2등분선에 놓이는가?

   2) $OA // O_1A_1$, $OB // O_1B_1$이라고 말할수 있는가?

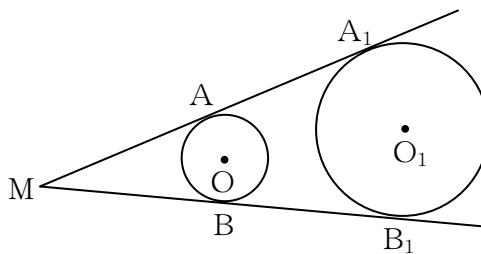



그림 4-81

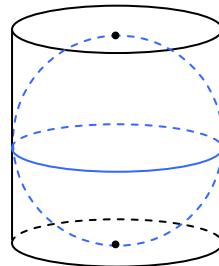
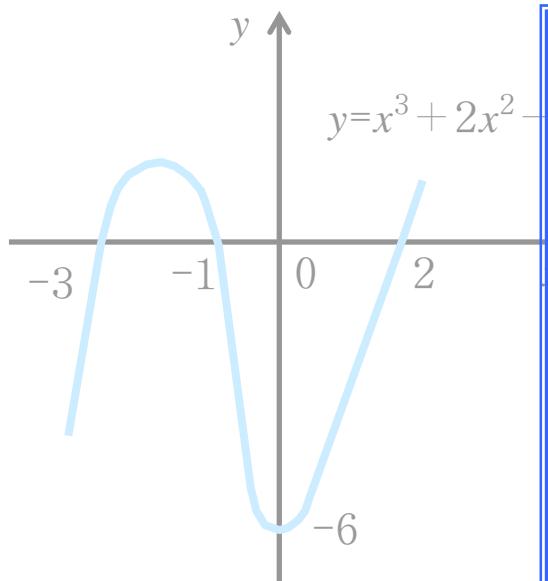



그림 4-82

10. 그림 4-82와 같이 높이가 6인 원기둥안에 구가 닿아있다. 이때

   1) 원기둥의 밑면의 반경은 얼마인가?

   2) 구의 반경은 얼마인가?

11. 원의 접선, 원기둥의 펼친그림에 관한 문제를 각각 1개씩 만들고 풀어보아라.

제5장. 련립1차방정식과 련립1차안같기식

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=p \\ a_2x+b_2y=q \end{cases}$$

제1절. 방정식과 안같기식의 변형

1. 방정식의 변형

알아보기 다음 방정식들에 서로 다른 변수가 몇개 들어있는가?

1) $3(x-1)+5=2-x$

2) $2x-3y=7$

3) $x+5y=3z-2$

4) $x-y=y+3$

방정식에 들어있는 서로 다른 변수의 개수에 따라 방정식을 가를수 있다. 방정식에 들어있는 서로 다른 변수가 1개이면 그 방정식을 **한변수방정식**, 2개이면 **두변수방정식**, 3개이면 **세변수방정식**, … 이라고 부른다.

례 1

방정식	종류	
$x^2+2x=6$	한변수방정식	
$\frac{2}{3}x+y^2=3-y$	두변수방정식	여러변수방정식
$x+0.5y-3x^2=5z$	세변수방정식	여러변수방정식
$7x+3u+27y=z$	네변수방정식	여러변수방정식
	… … …	여러변수방정식

문 제

다음 방정식들가운데서 한변수방정식, 두변수방정식, 세변수방정식을 각각 찾아보아라.

1) $\frac{1}{x+y}=3$　　2) $\frac{1}{2}x-x^2=3$

3) $\frac{x-y}{x+y}-3z^2=0$　　4) $\frac{3x^2-y^2}{x+y-z}=0$

5) $(x-2y)(3x+2)=0$　　6) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$

알아보기 방정식 $2x-y=-2$에 맞는 변수 x, y값의 렬 (x, y)를 다음의 렬가운데서 다 찾아라.

$(3, 2)$, $(2, 7)$, $(4, 10)$, $(-2, -2)$

여러변수방정식에 맞는 변수값들의 렬을 방정식의 풀이라고 부르며 풀이전부의 모임을 그 방정식의 풀이모임이라고 부른다. 방정식을 푼다는것은 그 방정식의 풀이모임을 구한다는것이다.

례 2 방정식 $2x+1=0$을 풀어라.

(풀이) 갈기식의 성질을 써서 마디를 옮기고 정돈하면

$$2x=-1$$

$$x=-\frac{1}{2}$$ 풀이모임 $\{-\frac{1}{2}\}$

례 3 자연수모임에서 방정식 $y=2x+1$의 풀이모임을 구하여라.

(풀이) 변수 x의 값으로 자연수 1, 2, 3, …, n, … 을 잡고 방정식에 맞는 변수 y의 값을 각각 구하면

$x=1$일 때 $y=2\cdot1+1=3$ (자연수)

$x=2$일 때 $y=2\cdot2+1=5$ (자연수)

$x=3$일 때 $y=2\cdot3+1=7$ (자연수)

… … …

$x=n$일 때 $y=2\cdot n+1$ (자연수)

… … …

따라서 풀이모임은

$$\{(1,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 7),\ \cdots,\ (n,\ 2n+1),\ \cdots\}$$

알아보기 방정식 ①로부터 ②를 어떻게 얻을수 있는가? 두 방정식의 풀이가 같은가 다른가?

$6x-3=0$ … … ①

$2x=1$ … … ②

방정식을 풀이가 같은 방정식으로 고치는것을 방정식을 변형한다고 말한다.

방정식을 다음과 같이 고치는것은 방정식의 변형이다.

1) 방정식의 두 변을 서로 바꾸는것

2) 마디의 부호를 바꾸어 다른 변으로 마디를 옮기는것

3) 방정식의 두 변에 각각 령 아닌 같은 수를 곱하거나 나누는것

한 방정식이 다른 방정식을 변형하여 얻어진다면 이 두 방정식은 서로 동등한 방정식이라고 부른다.

례 4 다음 방정식을 풀어라.

$$3=2x-5 \qquad ①$$

(풀이) 두 변을 바꾸면

$$2x-5=3 \qquad ②$$

왼변에 변수마디만 남도록 마디들을 옮기면

$$2x=8 \qquad ③$$

두 변을 $2(\neq 0)$로 나누면

$$x=4 \qquad ④$$

우의 례에서 방정식 ①, ②, ③, ④는 모두 서로 동등한 방정식이다.

따라서 방정식 ④의 풀이모임 $\{4\}$는 방정식 ①의 풀이모임으로 된다.

그러므로 방정식 ①의 풀이모임은 $\{4\}$이다.

문 제

다음 왼쪽방정식을 어떻게 변형하면 오른쪽방정식을 얻을수 있는가?

1) $3x+2=x-6$, $x-6=3x+2$

2) $2x+y=10$, $y=10-2x$

3) $6x+12=3y$, $2x-y=-4$

4) $\frac{x}{5}-\frac{y}{3}=2$, $3x-5y=30$

2. 안같기식의 변형

방정식에서와 같이 안같기식에서도 동등한 안같기식을 생각할수 있다.

알아보기 안같기식 ②로부터 ①이 어떻게 얻어지는가? 두 안같기식의 풀이모임이 같은가 다른가?

$$x-2>0 \ \cdots\ \cdots \ ①$$

$$4(x-2)>0 \ \cdots \ ②$$

안갈기식을 풀이가 같은 안갈기식으로 고치는것을 안갈기식을 변형한다고 말한다.

안갈기식을 다음과 같이 고치는것은 안갈기식의 변형이다.

1） 안갈기식의 두 변을 서로 바꾸면서 안갈기기호의 방향을 돌려놓는것 （례．$A<B \leftrightarrow B>A$）

2） 마디의 부호를 바꾸어 다른 변으로 옮기는것

3） 안갈기식의 두 변에 같은 정수를 각각 곱하거나 나누는것

4） 안갈기식의 두 변에 같은 부수를 각각 곱하거나 나누면서 안갈기기호의 방향을 바꾸어놓는것

한 안갈기식이 다른 안갈기식을 변형하여 얻어진다면 이 두 안갈기식을 서로 동등한 안갈기식이라고 부른다.

례 1 안갈기식

$$\frac{2}{3}x-\frac{1-x}{2}<1-\frac{x}{4} \qquad ①$$

의 풀이과정을 보면서 안갈기식 ②, ③, ④가 각각 어떤 변형을 하여 얻은것인가를 ( )안에 밝혀라.

(풀이) $8x-6(1-x)<12-3x$ ② ( )

$8x-6+6x<12-3x$

$14x-6<12-3x$

$14x+3x<12+6$ ③ ( )

$17x<18$

$x<\frac{18}{17}=1\frac{1}{17}$ ④ ( )

안갈기식 ②, ③, ④는 모두 안갈기식 ①을 변형하여 얻은 안갈기식이므로 동등한 안갈기식이다. 즉 그것들의 풀이모임은 모두 같다.

안갈기식 ④의 풀이모임은 $\left(-\infty,\ 1\frac{1}{17}\right)$

그러므로 구하려는 안갈기식 ①의 풀이모임은 $\left(-\infty,\ 1\frac{1}{17}\right)$

례 2 x에 관한 안갈기식

$$3<1-ax \qquad ①$$

를 풀어라.

(풀이) 오른변에 변수마디만 남도록 마디들을 옮기고 정돈하면

$$2<-ax \quad ②$$

두 변을 서로 바꾸어쓰면

$$-ax>2 \quad ③$$

두 변에 각각 -1을 곱하면

$$ax<-2 \quad ④$$

$a>0$일 때 $x<-\frac{2}{a}$이므로 풀이모임은 $\left(-\infty,\ -\frac{2}{a}\right)$

$a=0$일 때 풀이모임은 $\varnothing$

$a<0$일 때 $x>-\frac{2}{a}$이므로 풀이모임은 $\left(-\frac{2}{a},\ +\infty\right)$

문 제

1. 다음 왼쪽안같기식으로부터 오른쪽안같기식을 얻는것이 어떤 변형인가를 말하여라.

1) $3x-2>7,\ 3x>7+2$　　2) $\frac{1}{4}x-3>x,\ x-12>4x$

3) $-3x+1<x,\ x>-3x+1$　　4) $-\frac{x}{3}+2>2x-1,\ x-6<-6x+3$

2. 다음 안같기식을 풀어라.

1) $\frac{x+5}{2}>\frac{4+3x}{3}$　　2) $\frac{2}{3}x-\frac{1-x}{2}<1-\frac{x}{4}$

3. 다음 안같기식을 x에 관해서 풀어라.

1) $ax+3>2x-6$　　2) $ax-4\le bx+6$

련 습 문 제

1. 옳은 답을 선택하여라.

1) $x=-2$일 때 $2x^2+mx+4$의 값이 18이면 $x=2$일 때 이 식의 값은 ( )이다.

① -18　　② -10　　③ 18　　④ 6

2) $y=1$이 방정식 $2-\frac{1}{3}(m-y)=2y$의 풀이이면 x에 관한 방정식 $m(x-3)-2=m(2x-5)$의 풀이는 ( )이다.

① -10　　② 0　　③ $\frac{4}{3}$　　④ 10

2. 다음 방정식을 [ ]안에 있는 글자에 관하여 풀어라.

1) $A=2\pi r(r+h)$, $[h]$ 2) $S=S_0+vt$, $[v]$

3) $S=vt+\frac{1}{2}gt^2$, $[v]$ 4) $y=\frac{1+3x}{2+x}$, $[x]$

5) $v=\frac{S-S_0}{t-t_0}$, $[t]$

3. 두변수방정식 $2x-y=4$을 y에 관하여 풀고 x가 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3일 때 y의 값을 구하여라.

4. x에 관한 안갈기식 $ax-1>x-a$에 대하여

1) 구간 $(-1, +\infty)$가 풀이모임으로 되자면 글자 a가 어떤 값이여야 하는가?

2) 구간 $(-\infty, -1)$이 풀이모임으로 되자면 글자 a가 어떤 값이여야 하는가?

3) 풀이모임이 빈모임으로 되자면 글자 a가 어떤 값을 가져야 하는가?

5. $a<c$, $ax+b<cx+d$일 때 □에 알맞는 안갈기기호를 써넣어라.

$$x\square\frac{d-b}{a-c}$$

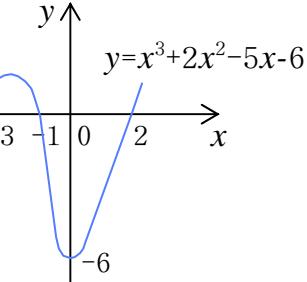
6. 그림 5−1을 보고 다음 안갈기식의 풀이모임을 말하여라.

1) $x^3+2x^2-5x-6>0$

2) $x^3+2x^2-5x-6\leq 0$

그림 5−1

7. x에 관한 방정식 $(a-b)x=c$가 있다.

1) 하나의 풀이를 가지려면 a, b, c는 어떤 값이여야 하는가?

2) 아무런 수나 풀이로 되자면 a, b, c는 어떤 값을 가져야 하는가?

3) 풀이모임이 빈모임으로 되자면 a, b, c는 어떤 값을 가져야 하는가?

8. x에 관한 안갈기식 $ax>b$의 풀이모임이 다음과 같을 때 a와 b는 어떤 값들을 가지게 되는가?

1) 풀이모두가 정수이다.(모든 정수는 아니다.)

2) 풀이모임은 모든 정수이다.

3) 풀이모임에는 정수도 있고 부수도 있다.

4) 풀이모두가 부수이다.(모든 부수는 아니다.)

5) 풀이모임은 모든 부수이다.

9. 어떤 물탕크에 뽐프로 한시간동안에 탕크용량의 $\frac{1}{20}$을 채울수 있다. 지금 물이 절반 차있는 탕크에 물을 채우면서 동시에 한시간동안에 탕크용량의 $\frac{1}{50}$씩 뽑아쓴다. 물을 채우기 시작하여 몇시간 지나야 탕크에 물이 $\frac{9}{10}$이상 차겠는가?

10. 35g의 소금이 녹아있는 소금물이 있다. 여기에 소금을 얼마 더 넣었더니 5％이상의 소금물 985g이 되였다. 소금을 얼마나 넣었는가?

제2절. 련립방정식의 의미

1. 련립방정식의 의미

찾기 다음 방정식들가운데서 변수가 든 마디의 차수가 1차인 방정식을 골라내여라.

1) $2x-9=6$ 2) $3x-2y=60$

3) $2x^2-x+1=y$ 4) $3x-y=4x-3y+10$

변수가 든 마디의 차수가 1인 방정식을 1차방정식이라고 부른다.

례 1

$2x-5=x+1$	한변수1차방정식
$3x+y=5$	두변수1차방정식
$x+2y-5z=10$	세변수1차방정식

찾기 두 방정식

$x+y=20$ ① $4x+2y=64$ ②

에서 다음의 두 수의 렬들은 방정식 ①에 다 맞는다. 이 렬들이 방정식 ②에도 다 맞는가 따져보아라.

(1, 19), (2, 18), (3, 17), (4, 16)

몇개의 방정식을 묶은것을 련립방정식이라고 부른다.

련립방정식에 서로 다른 변수가 2개 들어있고 매 방정식이 1차방정식일 때 그 련립방정식을 련립두변수1차방정식이라고 부른다.

련립두변수1차방정식의 일반모양(변수는 x, y)

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=p \\ a_2x+b_2y=q \end{cases}$$

례 2 련립방정식

$$\begin{cases} x+y=29 \\ 4x+2y=64 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x=2 \\ 7x-2y=3 \end{cases}$$

들은 다 련립두변수1차방정식이다.

련립방정식에 서로 다른 변수가 3개(n개) 들어있고 매 방정식의 차수가 1일 때 그 련립방정식을 **련립세변수(n변수)1차방정식**이라고 부른다.

례를 들어 련립방정식

$$\begin{cases} x+1=0 \\ x+y=2z \\ y-z=8 \end{cases}$$

은 련립세변수1차방정식이다.

문 제

다음 방정식들에 알맞는 이름을 달아라.

1) $3x-7y=20$

2) $\begin{cases} 2x-y=7 \\ 4x+5y=10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x-y=10 \\ 2x-y=5 \\ z+2y=1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x^2+y^2=31 \\ x-2y=4 \end{cases}$

2. 련립방정식의 풀이모임

해보기 변수 x, y의 렬이 모임

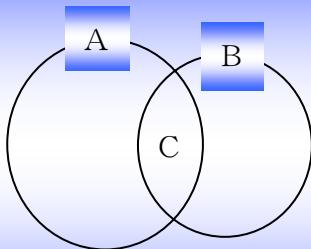
$\{(1,\ 7),\ (2,\ 5),\ (3,\ 3),\ (3,\ -4),\ (5,\ -1),\ (1,\ -7)\}$

의 원소들만을 잡을 때 련립방정식

$$\begin{cases} 2x+y=9 & ① \\ 3x-2y=17 & ② \end{cases}$$

에서 ①의 풀이모임 A, ②의 풀이모임 B, ①과 ②의 공동풀이들의 모임 C를 구하여라.

련립방정식의 매 방정식에 다 맞는 공통풀이를 그 련립방정식의 풀이라고 부른다.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=p & ① \\ a_2x+b_2y=q & ② \end{cases}$$

A: ①의 풀이모임

B: ②의 풀이모임

C=A∩B: 련립방정식의 풀이모임

련립방정식의 풀이모임을 구하는것을 간단히 련립방정식을 푼다고 말한다.

례 1 우의 해보기에 있는 련립방정식

$$\begin{cases} 2x+y=9 & ① \\ 3x-2y=17 & ② \end{cases}$$

의 풀이모임은 그림 5－2와 같이 (5, －1)이다. 따져보아라.

(1, 7)
(2, 5)
(3, 3)
(5, －1)
(1, －7)
(3, －4)

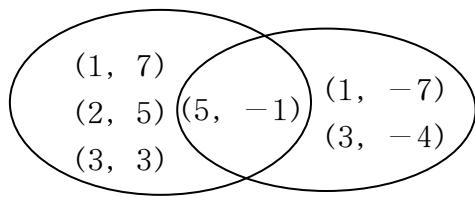



그림 5－2

례 2 $x=2$, $y=5$가 련립방정식의 풀이가 되게 a의 값을 정하여라.

$$\begin{cases} ax+3y=21 & ① \\ 5x-5a=-5 & ② \end{cases}$$

(풀이) $x=2$, $y=5$를 련립방정식에 갈아넣고 매 방정식들을 변형하면

$$\begin{cases} 2a+15=21 \\ 10-5a=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=6 \\ -5a=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=3 \end{cases}$$

즉 $a=3$으로 정하면 된다.

문 제

1. $x=1$, $y=-3$이 련립방정식

$$\begin{cases} x-y=4 \\ y=-x-2 \end{cases}$$

의 풀이로 되는가를 따져보아라.

2. x, y의 값 렬들의 모임 $\{(2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$의 원소들가운데서 련립방정식

$$\begin{cases} 4x-y=1 \\ x+2y=7 \end{cases}$$

의 풀이를 구하여라.

3. a가 아무런 값을 잡아도 $x=3$, $y=1$이 련립방정식

$$\begin{cases} ax-y=13 \\ 2x+3y=3 \end{cases}$$

의 풀이로 될수 없다는것을 밝혀라.

련 습 문 제

1. x, y가 5보다 크지 않은 자연수값들만을 잡을수 있을 때 련립방정식

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+3y=11 \end{cases}$$

의 풀이를 구하여라.

2. x, y가 옹근수값만을 잡을수 있을 때 련립방정식

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x-y=1 \end{cases}$$

의 풀이모임을 구하여라.

3. $x=1$, $y=2$가 련립방정식

$$\begin{cases} ax+3y=2 \\ 6x+2y=10 \end{cases}$$

의 풀이가 되도록 a의 값을 구하여라.

4. x에 관한 1차방정식

$$\frac{2kx+a}{3}-\frac{x-bk}{6}=2$$

의 풀이가 아무런 k의 값에 대해서도 1이 되도록 a, b의 값을 정하여라.

5. k가 정수일 때 x에 관한 방정식

$$k^2x-k^2=2kx-5x$$

의 풀이가 항상 정수라고 말할수 있는가?

제3절. 련립두변수1차방정식의 풀이법

1. 갈아넣기법

련립두변수1차방정식은 거기에 들어있는 어느 한 방정식이 한변수1차방정식으로 되도록 변형하여 푼다.

례 1 다음 련립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x+3y=5 & ① \\ y=2x-3 & ② \end{cases}$$

(풀이) ②를 ①에 갈아넣으면 ①은 한변수1차방정식으로 된다.

②를 ①에 갈아넣으면

$$x+3(2x-3)=5$$
$$x+6x-9=5$$
$$7x=14$$
$$x=2 \qquad ③$$

③을 ②에 갈아넣으면

$$y=4-3=1$$

풀이모임 $\{(2,\ 1)\}$

이와 같이 한 변수를 다른 변수에 관한 식으로 표시하고 갈아넣으면서 련립방정식을 푸는 방법을 **갈아넣기법**이라고 부른다.

례 2 다음 두변수1차방정식을 갈아넣기법으로 풀어라.

$$\begin{cases} x-y=2 & ① \\ 2x-3y=3 & ② \end{cases}$$

(풀이) ①에서 변수 x를 y에 관한 1차식으로 표시하면

$$x=2+y \qquad ③$$

③을 ②에 갈아넣으면

$$2(2+y)-3y=3$$
$$4+2y-3y=3$$
$$-y=-1$$
$$y=1$$

이것을 ③에 갈아넣으면

$$x=2+1=3$$

풀이모임 $\{(3,\ 1)\}$

문 제

1. 례 2에서 변수 y를 x에 관한 1차식으로 표시하고 풀어라. 그리고 그 풀이를 례 2에서 얻은것과 비교하여라.
2. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} x=y-2 \\ x+2y=7 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} 2x-y=5 \\ 5x+2y=23 \end{cases}$　　3) $\begin{cases} 3x+8y=-1 \\ 2x+5y=1.5 \end{cases}$

3. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} 25x-4y+1=0 \\ 31x-5y+16=0 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} 4(x+2)-3=-2-5y \\ 3(y+2)-x=-3-3x \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x+6y-98=0 \\ 3x+2y-46=0 \end{cases}$　　4) $\begin{cases} \dfrac{x+5}{2}-\dfrac{2y-12}{9}=3\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2x+7}{3}-\dfrac{5y-3}{6}=1 \end{cases}$

2. 더덜기법

련립방정식에 들어있는 두 방정식을 변끼리 더하거나 덜어서 한변수1차방정식을 얻어내면 그것을 쉽게 풀수 있다.

례 1 다음 련립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} 3x-2y=-3 & ① \\ 5x+2y=11 & ② \end{cases}$$

(풀이) ①+②

$$\begin{array}{r} 3x-2y=-3 \\ +)\ 5x+2y=11 \\ \hline 8x \qquad =8 \end{array}$$

$x=1$ ③

③을 ②에 갈아넣으면

$5\cdot 1+2y=11$

$2y=6$

$y=3$

풀이모임 $\{(1,\ 3)\}$

($x=1$을 ①에 갈아넣어도 꼭같은 풀이를 얻는다.)

례 2 다음 련립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} 3x+4y=-6 & ① \\ 6x-5y=27 & ② \end{cases}$$

(풀이) 방정식 ①과 방정식 ②를 그대로 두고 변끼리 더하거나 덜어서는 한변수1차방정식을 얻을수 없다. 즉 어느 한 변수가 없어지지 않는다. 이러한 때에는 어느 한 변수의 결수들을 같게 또는 서로 반대수가 되게 변형하여 변끼리 덜거나 더해야 한다.

①×2

$$\begin{cases} 6x+8y=-12 & ③ \\ 6x-5y=27 & ② \end{cases}$$

③－②

$13y=-39$

$y=-3$

이것을 ②에 갈아넣으면

$6x-5(-3)=27$

$6x=12$

$x=2$

풀이모임 $\{(2,\ -3)\}$

이와 같이 두 방정식을 변끼리 더하거나 더는 방법으로 련립방정식을 푸는 방법을 **더덜기법**이라고 부른다.

문 제

1. 다음 련립방정식을 더덜기법으로 풀어라.

1) $\begin{cases} 3x+4y=15 \\ x+4y=8 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} 3x-4y=15 \\ 2x+3y=20 \end{cases}$　　3) $\begin{cases} 7x-2y=3 \\ 3x+5y=-28 \end{cases}$

2. 다음 련립방정식을 편리한 방법으로 풀어라.

1) $\begin{cases} 9x-4y=16 \\ 5x+4y=10 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} 5x-y=2 \\ y=3x+1 \end{cases}$　　3) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+4y=-1 \end{cases}$

3. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} 3(x-2)=2(5y-1)-5 \\ 2(3x+1)=5(2-y)-15 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{2x}{9}+\dfrac{y}{4}=11 \\ \dfrac{5x}{12}+\dfrac{y}{3}=19 \end{cases}$　　3) $\begin{cases} \dfrac{x+5}{3}-2y=\dfrac{3x-y}{4}-7 \\ \dfrac{10(y-x)-4(1-y)}{3}=x \end{cases}$

3. 그라프에 의한 풀이법

해보기 련립두변수1차방정식

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=p \\ a_2x+b_2y=q \end{cases}$$

을 그라프에 의하여 어떻게 풀겠는가?

례 다음 련립두변수1차방정식을 그라프에 의하여 풀어라.

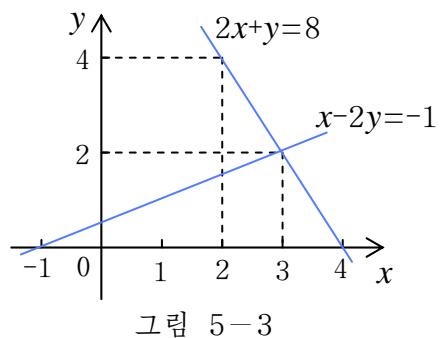
$$\begin{cases} x-2y=-1 & ① \\ 2x+y=8 & ② \end{cases}$$

(풀이) 1차식 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, $y=-2x+8$의 그라프를 한자리표평면에 그리고 사귐점의 자리표를 찾으면 (3, 2)이다.

따라서 련립방정식의 풀이모임은

{(3, 2)}

그림 5-3

문 제

1. 다음 련립방정식을 그라프로 풀어라.

1) $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$　2) $\begin{cases} x+2y=7 \\ 3x-y=0 \end{cases}$　3) $\begin{cases} 4x-7y=-15 \\ x+3y=8 \end{cases}$

2. 다음 련립방정식을 편리한 방법으로 풀어라.

1) $\begin{cases} 9x-4y=16 \\ 5x+5y=10 \end{cases}$　2) $\begin{cases} 5x-y=2 \\ y=3x+4 \end{cases}$　3) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+5y=-1 \end{cases}$

3. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} 2x-3y=-2 \\ 3x+4y=-5 \end{cases}$　2) $\begin{cases} x-2y=5 \\ 2x-3y=8 \end{cases}$　3) $\begin{cases} 8x-y=3 \\ 6x-5y=-19 \end{cases}$

련 습 문 제

1. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} 3x+5y=4 \\ x-2y=-6 \end{cases}$　2) $\begin{cases} 3x+4y=11 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$　3) $\begin{cases} 8x-y=-7 \\ x-2y=1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y=x+3 \\ 3x+4y=17 \end{cases}$　5) $\begin{cases} 5x+3y=1 \\ 6x+5y=4 \end{cases}$　6) $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x+y-5=0 \end{cases}$

2. 다음 련립방정식을 그라프에 의하여 풀어라.

1) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2y-x=2 \end{cases}$　2) $\begin{cases} 4x+y=1 \\ 3x+2y=2 \end{cases}$　3) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 4x+2y=2 \end{cases}$

3. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} \frac{3}{5}x-\frac{5}{2}y=-\frac{9}{2} \\ \frac{2}{3}x+\frac{5}{6}y=\frac{35}{6} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{3x-y}{2}-\frac{7-y}{5}=3x-2 \\ \frac{5+x}{3}-\frac{y+6}{4}=\frac{y}{2}-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x-5}{4}-\frac{y+9}{5}=\frac{x}{3}-2y+1 \\ \frac{x+2}{5}+\frac{y+5}{3}=\frac{x+y}{4}+2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x-7y=4.6 \\ 1.8x-5y=0.8 \end{cases}$

제4절. 련립세변수1차방정식의 풀이법

세변수1차방정식을 묶은것이 련립세변수1차방정식이다.

련립세변수1차방정식도 련립두변수1차방정식에서와 같은 방법으로 푼다.

례 1 련립세변수1차방정식

$$\begin{cases} 2x-2y+z=6 & ① \\ 3x-4y+2z=11 & ② \\ 4x+y-z=1 & ③ \end{cases}$$

을 풀어라.

(풀이) ③에서 $z=4x+y-1$ ④

④를 ①과 ②에 각각 갈아넣으면

$$2x-2y+(4x+y-1)=6$$

$$3x-4y+2(4x+y-1)=11$$

이것을 정돈하면

$$6x-y=7 \quad ⑤$$

$$11x-2y=13 \quad ⑥$$

⑤에서 $y=6x-7$ ⑦

⑦을 ⑥에 갈아넣으면

$$11x-2(6x-7)=13$$
$$-x=-1$$
$$x=1$$
$x=1$을 ⑦에 갈아넣으면
$$y=6\cdot1-7=-1$$
$x=1,\ y=-1$을 ④에 갈아넣으면
$$z=4-1-1=2$$
풀이모임 $\{(1,\ -1,\ 2)\}$

례 2 다음 련립세변수1차방정식을 풀어라.

$$\begin{cases}2x-3y+z=7 & ①\\ x+4y-z=6 & ②\\ 3x-2y+2z=14 & ③\end{cases}$$

(풀이) ①+②

$$\begin{array}{rl} & 2x-3y+z=7\\ +) & x+4y-z=6\\ \hline & 3x+y\qquad=13 \end{array}\qquad ④$$

②×2+③

$$\begin{array}{rl} & 2x+8y-2z=12\\ +) & 3x-2y+2z=14\\ \hline & 5x+6y\qquad=26 \end{array}\qquad ⑤$$

④×6−⑤

$$\begin{array}{rl} & 18x+6y=78\\ -) & 5x+6y=26\\ \hline & 13x\qquad=52 \end{array}$$

$$x=4$$
$x=4$를 ④에 갈아넣으면
$$3\cdot4+y=13$$
$$y=1$$
$x=4,\ y=1$을 ①에 갈아넣으면
$$2\cdot4-3\cdot1+z=7$$
$$z=2$$
풀이모임 $\{(4,\ 1,\ 2)\}$

문 제

다음 련립방정식을 풀어라.(1―2)

1.

1) $\begin{cases} 2x+6y+3z=-1 \\ 3x+15y+z=2 \\ 4x-9y+4z=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y-5z=17 \\ 3x-y-6z=-14 \\ 8x-7y+2z=17 \end{cases}$

2.

1) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=36\frac{1}{2} \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=27 \\ \frac{x}{5}+\frac{y}{6}+\frac{z}{7}=28 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{2}{3} \\ \frac{z}{x}=\frac{1}{3} \\ y=3-z \end{cases}$

련 습 문 제

1. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} 2x+7y-z=8 \\ 4x+2y+3z=9 \\ 3x-5y+3z=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} p+q+2r=9 \\ p-q+r=2 \\ 4p+2q+r=11 \end{cases}$

2. 다음 련립방정식들을 풀어라.

1) $\begin{cases} \frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=4 \\ \frac{x}{6}-\frac{2y}{3}+z=-4 \\ \frac{x}{12}+\frac{y}{3}-\frac{z}{5}=-\frac{7}{10} \end{cases}$ 2) $\frac{3y+2z}{4}=\frac{3y+z}{6}=\frac{5x+y-z}{6}=2$

3. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} 2x-y-z=3 \\ 4x+2y-z=15 \\ 4x+3y=18 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y-z=3 \\ 2x+2y-z=15 \\ 2x+3y=18 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-2y-z=3 \\ 4x+4y-z=15 \\ 4x+6y=9 \end{cases}$

제5절. 련립방정식 세우기

례 직4각형모양의 수영장의 둘레는 74m이고 길이는 너비보다 13m 길다. 이 수영장의 길이와 너비를 구하여라.

(풀이) 길이를 xm, 너비를 ym라고 하면

첫 조건에 의하여 $2(x+y)=74$

둘째 조건에 의하여 $x-y=13$

두 조건에 다 맞는 x, y를 구해야 하므로

$$\begin{cases} 2(x+y)=74 \\ x-y=13 \end{cases}$$

이것을 풀면 $x=25$, $y=12$(이것은 문제의 뜻에 맞는다.)

답. 길이 25m, 너비 12m

련립방정식을 세워서 문제를 푸는 순서

1) 구하려는 량들을 변수로 잡는다.	길이 x, 너비 y
2) 문제의 조건에 따라 변수의 개수만 한 방정식으로 된 련립방정식을 세운다.	$\begin{cases} 2(x+y)=74 \\ x-y=13 \end{cases}$
3) 방정식을 푼다.	$x=25$, $y=12$
4) 구한 풀이가 문제의 뜻에 맞는가를 따져보고 맞는것을 답으로 쓴다.	답. 길이 25m, 너비 12m

문 제

1. 두 수가 있다. 큰 수를 작은 수로 나누면 상이 3이고 나머지가 8이다. 큰 수의 3배를 작은 수로 나누면 상은 11이고 나머지가 2이다. 이 두 수를 구하여라.
2. 어떤 학교 2학년 학생들에게 수첩을 나누어주려고 하는데 한 학생에게 2권씩 나누어주려면 50권이 모자란다. 그가운데서 80명에게는 2권씩 나누어주고 나머지 학생들에게는 1권씩 나누어주면 꼭맞는다. 이 학년의 학생은 몇명이고 수첩은 몇권인가?
3. 학생들이 등산을 하였는데 큰 산을 넘어갔다가 그 길로 다시 돌아왔다. 오름길에서는 한시간에 4km씩, 내림길에서는 한시간에 6km씩 걸었다고 한다. 가는데 2시간 35분, 돌아오는데 2시간 50분 걸렸다면 오름길과 내림길은 각각 몇km인가?
4. 위대한 령도자 **김정일**대원수님께서 사회주의농촌을 잘 도와줄데 대하여 주신 유훈을 높이 받들고 어느 기계공장의 두 작업반에서는 한달동안에 360대의 양수기를 만들것을 계획하였다. 그런데 첫 작업반에서는 계획을 150％로, 둘째 작업반에서는 계획을 170％로 넘쳐수행한 결과 모두 560대의 양수기를 만들었다. 매 작업반에서 양수기를 각각 몇대씩 만들 계획이였는가?
5. 형과 동생이 한주일동안에 수학문제를 170문제 풀기로 계획하였다. 첫날 형은 10문제를, 동생은 8문제를 풀었다. 그리하여 앞으로 형이 풀 문제는 동생이 풀 문제수의 90％로 되였다. 형과 동생이 수학문제를 각각 몇문제를 풀기로 계획하였는가?
6. 한가정에서 동, 아연, 알루미니움을 모두 65kg 모아 수매하였다. 동과 알루미니움을 합한것은 아연보다 1kg 더 많고 동은 알루미니움보다 15kg 더 많다. 동, 아연, 알루미니움을 각각 몇kg씩 모아 수매하였는가?
7. 어느 협동농장의 토지정리를 위하여 성능이 각각 서로 다른 3대의 불도젤이 동원되였다. 첫 2대의 불도젤이 10일간 정리하고 나머지 셋째 불도젤이 혼자서 정리하면 30일간 걸리고 첫째 불도젤과 셋째 불도젤이 20일간 정리하고 나머지를 둘째 불도젤이 혼자서 정리하면 8일간 걸린다. 세 불도젤이 함께 정리하면 15일간 걸린다. 매 불도젤이 혼자서 정리하면 각각 며칠씩 걸리겠는가?

련 습 문 제

1. 두자리자연수의 수자들의 합은 14이고 하나의 자리수자와 열의 자리수자를 바꾸면 주어진 수보다 36 커진다. 주어진 두자리자연수를 구하여라.
2. 세자리옹근수가 있다. 제일 왼쪽에 있는 수를 제일 오른쪽으로 옮겨놓으면 처음보다 45 작아지고 백의 자리수자의 9배는 열의 자리와 하나의 자리수자로 된 두자리자연수보다 3 작다. 처음 세자리옹근수를 구하여라.
3. 어느 제1중학교의 지난해 남학생수와 녀학생수의 비률은 3:2였다. 올해는 지난해에 비하여 남자는 3% 늘고 녀자는 4% 늘었다. 올해의 전체 학생수는 지난해 전체 학생수에 비하여 몇% 늘었는가?
4. 두가지 물건 A와 B를 샀다. A를 7개, B를 3개 산 값으로 775원을 물었는데 판매원이 A와 B의 개수를 바꾸어 계산하였다는것을 알게 되여 100원을 다시 돌려주었다. A, B 한개의 값은 각각 얼마인가?
5. 위대한 령도자 **김정일**대원수님께서 토지정리를 잘할데 대하여 주신 유훈을 높이 받들고 한 기업소의 두 작업반에서만도 지난해에 47정보의 토지를 정리하였다. 첫 작업반에서 정리한 면적은 둘째 작업반에서 정리한 면적의 135%이다. 두 작업반이 각각 몇정보씩 정리하였는가?
6. 어느 군의 책방에서 세 중학교 A, B, C에 300권의 책을 나누어주었다. 그 책의 일부는 세 학교에 꼭같이 나누어주고 나머지는 학생수에 비례하여 A, B, C에 각각 5:3:2의 비로 나누어주었다. 그리하여 A는 C보다 54권의 책을 더 받았다. 매 학교는 각각 몇권의 책을 받았는가?
7. 어떤 기계부속품창고의 306개 상자에 있는 기계부속품의 수는 1 082개이다. 첫 종류의 부속품은 한 상자에 4개, 둘째 종류의 부속품은 한 상자에 2개씩 넣었다. 두가지 기계부속품이 각각 몇개씩 있는가?
8. 수 a의 50%는 수 b의 40%보다 14 크고 수 b의 30%는 수 a의 30%보다 14 크다. 수 a와 b를 구하여라.
9. 어떤 렬차가 760m의 철다리를 건느기 시작하여 다 건늘 때까지 25초 걸리고 2 560m의 굴에 들어가기 시작하여 완전히 나올 때까지 1분 10초 걸렸다. 이 기차의 길이와 한시간에 가는 거리를 구하여라.
10. 한 짐배가 강을 따라 2시간사이에 56km 내려갔다가 돌아서서 3시간사이에 66km 올라왔다. 강물의 속도와 흐르지 않는 물에서의 배의 속도를 구하여라.
11. 두가지 쇠돌이 다 해서 13t 있다. 첫 쇠돌에는 철이 45% 들어있고 둘째 쇠돌에는 철이 30% 들어있다. 두가지 쇠돌에 들어있는 철이 모두 4.8t이면 두가지 쇠돌은 각각 얼마씩인가?

12. $\frac{2}{3}$와 같은 분수가 있다. 분자, 분모에 각각 같은 수를 더하면 $\frac{8}{11}$이 되고 분자와 분모의 각각을 앞의 수보다 1만큼 큰 수로 덜면 $\frac{5}{9}$로 된다고 한다. 이 분수를 구하여라.

13. 세자리자연수가 있다. 이 수의 매 수자들의 합의 48배는 이 수와 같고 매 자리수자를 거꿀순서로 쓴 세자리수는 주어진 수보다 198 작다. 또 하나의 자리수자와 백의 자리수자의 합은 열의 자리수자의 2배이다. 이 자연수를 구하여라.

14. 100kg의 철을 가지고 한개에 철이 각각 5kg, 1kg, 250g 드는 세가지 제품을 모두 100개 생산하려고 한다. 철이 1kg 드는 제품을 5kg 드는 제품의 2배를 생산하려면 세가지 제품을 각각 몇개씩 생산하여야 하겠는가?

15. A와 B 두 사람이 공동으로 어떤 일을 12일간에 끝낼것을 계획하고 6일간 일하였는데 기한내에 일을 끝낼수 없다는것을 알게 되였다. 그리하여 C에게 부탁하여 7일째부터 세 사람이 일을 하여 기한내에 일을 끝냈다. A와 B가 따로 일하여 일을 끝내는데 걸리는 날자수의 비는 2:3이고 A와 B가 공동으로 일을 끝내는 날자수와 B와 C가 공동으로 일을 끝내는 날자수의 비는 7:8이다. 세 사람이 처음부터 공동으로 일하면 며칠동안에 끝내겠는가?

제6절. 련립한변수1차안같기식

알아보기 다음 안같기식들에서 변수의 개수와 마디의 가장 높은 차수를 불러보아라.

1) $x^2+3x+1<0$ 2) $xy+3x-2y-1>0$

3) $2x+3y>4$ 4) $x^3+y^3+z^3-xy<0$

안같기식은 거기에 들어있는 변수의 개수와 마디의 차수에 따라 가를수 있다.

한변수1차안같기식 — 변수 1개, 마디의 최고차수 1

$(3x+1>x)$

두변수1차안같기식 — 변수 2개, 마디의 최고차수 1

$(2x-y<5)$

두변수2차안같기식 — 변수 2개, 마디의 최고차수 2

$(x^2+y^2\geq 1)$

련립방정식에서와 마찬가지로 련립안같기식과 그 풀이를 생각할수 있다.

몇개의 안같기식의 공통풀이를 생각할 때에는 이 안같기식들을 한데 묶어 생각한다.

안같기식들을 묶은것을 련립안같기식이라고 부른다.

련립안같기식의 매 안같기식에 다 맞는 변수의 값을 련립안같기식의 풀이라고 부르며 련립안같기식의 풀이모임을 구하는것을 련립안같기식을 푼다고 말한다.

례 1 $\begin{cases} x+3<9 \\ 3x+2<4 \end{cases}$ 은 련립한변수1차안같기식이다.

련립안같기식도 련립방정식과 비슷한 방법으로 푼다.

례 2 다음 련립안같기식을 풀어라.

$$\begin{cases} 7x+2 \geq 5x & ① \\ -4x+1<22+3x & ② \end{cases}$$

(풀이) ①을 풀면

$$2x \geq -2$$
$$x \geq -1$$

②를 풀면

$$-7x < 21$$
$$x > -3$$

①과 ②의 공통풀이

$$x \geq -1$$

따라서 풀이모임은 $[-1, +\infty)$

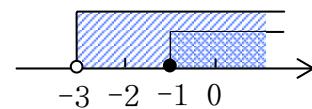
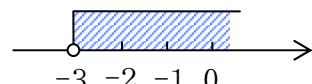
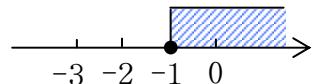



그림 5−4

문 제

다음 련립안같기식을 풀어라.(1−3)

1. 1) $\begin{cases} 4x-8<x+1 \\ 3x-4<5x-14 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+2 \geq 5x-6 \\ 3-2x \geq x+2 \end{cases}$

2. 1) $\begin{cases} 5x-2<7x+5 \\ 3(x-2)<x-3 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} 2x-7>3x+1 \\ 3(x-2)<5+3x \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+2<3x-8 \\ 10x-5(x-2)>8(x-2)+5 \end{cases}$　　4) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-3>\frac{1}{4}x \\ \frac{1}{3}x+1>x \end{cases}$

3. 1) $\begin{cases} \frac{3x+5}{7}+\frac{10-3x}{5}>\frac{2x+7}{3}-3 \\ \frac{7x}{3}-\frac{11(x+3)}{5}>\frac{3x-1}{5}-\frac{13-x}{2} \end{cases}$　　2) $\begin{cases} 3-\frac{3-7x}{10}+\frac{x+1}{2}>4-\frac{7-3x}{5} \\ \frac{7}{4}(3x-6)+17-x>\frac{11}{4}-\frac{5}{4}(x-3) \end{cases}$

례 3 다음 련립안갈기식을 풀어라.

$$\begin{cases} 2x-4<2+x & ① \\ 2x+5<13 & ② \\ 8-x\leq 6 & ③ \end{cases}$$

(풀이) ①을 풀면 $x<6$

②를 풀면 $x<4$

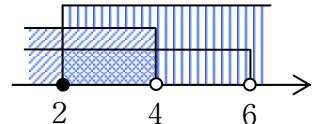
③을 풀면 $x\geq 2$

공통풀이를 구하면

$2\leq x<4$

풀이모임 [2, 4)

그림 5-5

문 제

1. 다음 련립안갈기식을 풀어라.

1) $\begin{cases} 2x-1<3 \\ -90x<0 \\ 4x-5>3x-3 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} 3x+x<4+2x \\ 5x-3<4x-1 \\ 7+2x>6-3x \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-1<3-x \\ 3-x \le x+1 \\ \frac{2}{3}x-5<2x-1 \end{cases}$　　4) $\begin{cases} x-1 \ge 3-x \\ 3-x > x+1 \\ 2x-1 \ge \frac{2}{3}x-5 \end{cases}$

2. 다음 련립안갈기식을 풀어라.

1) $\begin{cases} 3+2x<11+x \\ 2-x \ge 3x-22 \\ 5(x-1)>2(x+3)-17 \\ x+5<4x+11 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} 0.5x+1.6>1.9-0.1x \\ 0.5x \le 7-1.25x \\ 3x+8 \ge 5x+2 \\ x-\frac{2}{3}<3(x-1)-\frac{1}{2} \end{cases}$

례 4 안갈기식

$$|x-2|>5$$

를 풀어라.

(풀이) 주어진 안갈기식의 풀이모임을 구하기 위해서는 다음의 두 련립안갈기식

$$\begin{cases} x-2 \ge 0 \\ x-2>5 \end{cases} \quad ① \qquad \begin{cases} x-2<0 \\ -x+2>5 \end{cases} \quad ②$$

들의 풀이모임들의 합모임을 구하면 된다.

①을 풀자.

$$\begin{cases} x-2 \ge 0 \\ x-2>5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 2 \\ x>7 \end{cases}$$

$$x>7$$

①의 풀이모임은

$$(7,\ +\infty)$$

②를 풀자.

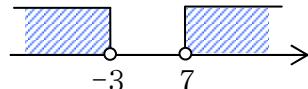
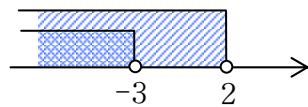
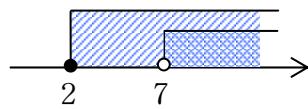



그림 5－6

$$\begin{cases} x-2<0 \\ -x+2>5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<2 \\ x<-3 \end{cases}$$

$$x<-3$$

②의 풀이모임은

$$(-\infty, \ -3)$$

따라서 구하려는 풀이모임은 $(-\infty, \ -3)\cup(7, \ +\infty)$

알아보기 a, b가 다음과 같은 수일 때 ab, $\frac{a}{b}$의 부호를 결정하여라.

1) $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a<0 \\ b<0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a>0 \\ b<0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a<0 \\ b>0 \end{cases}$

$$\frac{a}{b}>0 \Leftrightarrow ab>0, \qquad \frac{a}{b}<0 \Leftrightarrow ab<0$$

$$ab>0, \ \frac{a}{b}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} a<0 \\ b<0 \end{cases}$$

$$ab<0, \ \frac{a}{b}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b<0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} a<0 \\ b>0 \end{cases}$$

례 5 $\frac{1-x}{2x-1}>0$을 풀어라.

(풀이) 주어진 안갈기식의 풀이모임을 구하기 위하여서는 다음의 두 련립안갈기식

$$\begin{cases} 1-x>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \quad ① \qquad \begin{cases} 1-x<0 \\ 2x-1<0 \end{cases} \quad ②$$

들의 풀이모임들의 합모임을 구하면 된다.

①

$$\begin{cases} 1-x>0 \\ 2x-1>0 \end{cases}$$

을 풀자.

$$\begin{cases} x<1 \\ x>\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}<x<1$$

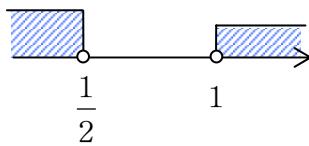
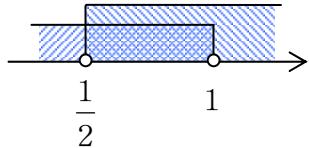



그림 5－7

②

$$\begin{cases} 1-x<0 \\ 2x-1<0 \end{cases}$$

을 풀자.

$$\begin{cases} x>1 \\ x<\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

이때 풀이는 없다.

따라서 주어진 안갈기식의 풀이모임 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$

문 제

다음 안갈기식을 풀어라.(1－3)

1. 1) $3\le 5x-1\le 3+x$　　2) $1<\frac{2x-1}{2}\le 2$

2. 1) $|3x-1|>x+5$　　2) $3<|x-1|\le 7$

3. 1) $\frac{3x+7}{2-6x}\le 0$　　2) $\frac{1+x}{3-x}>1$

례 6 안갈기식 $(x+2)(x-4)<0$을 풀어라.

(풀이) 이 안갈기식을 풀기 위해서는 다음의 두 련립안갈기식들의 풀이모임의 합을 구하면 된다.

$$\begin{cases} x+2>0 \\ x-4<0 \end{cases} \quad ① \qquad \begin{cases} x+2<0 \\ x-4>0 \end{cases} \quad ②$$

①을 풀면 풀이모임은 $(-2,\ 4)$

②를 풀면 풀이모임은 $\varnothing$

풀이모임은 $(-2,\ 4)$

례 7 안갈기식 $(x+5)(x-3)>0$을 풀어라.

(풀이)

$$\begin{cases} x+5>0 \\ x-3>0 \end{cases} \quad ① \qquad \begin{cases} x+5<0 \\ x-3<0 \end{cases} \quad ②$$

①의 풀이모임 $(3,\ +\infty)$

②의 풀이모임 $(-\infty,\ -5)$

풀이모임 $(-\infty,\ -5)\cup(3,\ +\infty)$

례 8 안갈기식 $(x-1)(x+2)(x+3)>0$을 풀어라.

(풀이) 이 안갈기식을 풀기 위해서는 다음 련립안갈기식들의 풀이모임의 합을 구하면 된다.

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x+2>0 \\ x+3>0 \end{cases} \quad ① \qquad \begin{cases} x-1<0 \\ x+2<0 \\ x+3>0 \end{cases} \quad ②$$

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x+2<0 \\ x+3<0 \end{cases} \quad ③ \qquad \begin{cases} x-1<0 \\ x+2>0 \\ x+3<0 \end{cases} \quad ④$$

①의 풀이모임 $(1,\ +\infty)$

②의 풀이모임 $(-3,\ -2)$

③의 풀이모임 $\varnothing$

④의 풀이모임 $\varnothing$

풀이모임 $(-3,\ -2)\cup(1,\ +\infty)$

문 제

다음 안갈기식을 풀어라.

1) $(x+2)(x-10)>0$

2) $(x+3)(5x+6)<0$

3) $(x-3)(x+1)(x+4)>0$

4) $(x-1)(x-2)(x+1)(x+2)<0$

례 9 700개의 물건을 한 상자에 15개씩 넣으면 물건이 세 상자분이상 남고 한 상자에 20개씩 넣으면 8개이상의 빈 상자가 남는다고 한다. 상자는 모두 몇개인가?

(풀이) 상자의 개수를 x라고 하면 한 상자에 15개씩 넣을 때 상자에 들어가는 물건의 개수는 $15x$이고 문제의 조건에 의하여

$$700-15x \geq 3 \cdot 15 \qquad ①$$

한 상자에 20개씩 넣을 때 상자에 들어가는 물건의 수는 $20x$이고 문제의 조건에 의하여

$$20x-700 \geq 8 \cdot 20 \qquad ②$$

①과 ②를 련립시켜 풀면

$$43 \leq x \leq 43\frac{2}{3}$$

그런데 상자수는 자연수이여야 하므로

$$x=43$$

답. 상자수 43개

문 제

1. 어떤 두자리수에 그 수의 절반을 더하면 128보다 크고 130보다 작은 수를 얻는다. 이 수를 구하여라.
2. 매일 26페지씩 읽으면 23일간에 다 읽고 34페지씩 읽으면 17일간에 다 읽을 수 있는 책이 있다. 이 책을 매일 14페지씩 읽으면 며칠간에 다 읽겠는가?

련 습 문 제

1. 다음 련립안같기식을 풀어라.

1) $\begin{cases} x+3>3x-1 \\ 2x-3 \leq x+1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x-7<3(2x-1) \\ 8x-5<\dfrac{1}{2}(x+5) \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{x-1}{2}>1 \\ \dfrac{1}{5}(x-2) \geq x-\dfrac{2}{3} \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{7-2x}{2}-3<\dfrac{3+4x}{5}-1 \\ \dfrac{5}{3}x+5(4-x)<2(4-x) \end{cases}$

2. 다음 안같기식을 풀어라.

1) $\frac{1}{3}-\frac{x+1}{2}<\frac{x-1}{3}+1<2$　　2) $1+\frac{x}{2}<x-\frac{1}{2}<\frac{x+3}{2}+1$

3. 안같기식 $4x+1>x+7$의 풀이모임을 A, $3x+5>5(x-1)$의 풀이모임을 B, $\frac{x+2}{2}<\frac{x+3}{3}-\frac{1}{6}$의 풀이모임을 C라고 할 때 다음 모임을 구하여라.

1) $A\cap B$　　2) $A\cap C$　　3) $B\cap C$　　4) $A\cap B\cap C$

4. 다음 련립안같기식을 풀어라.

1) $\begin{cases}2x-1<x+3\\5x-1>6-2x\\x-3<0\end{cases}$　　2) $\begin{cases}3x-1<2+3x\\5x-1>x+7\\x-3<5\end{cases}$

3) $\begin{cases}5x-4<4x-2\\1-2x>2-4x\\3x-3<5x-5\\-2x<0\end{cases}$

5. 어떤 자연수에 5를 더하여 7배하면 105보다 크고 119보다 작다. 그 자연수를 구하여라.

6. 5%의 소금물 200g이 있다. 여기에 물을 넣어 2%이상이고 4%이하인 소금물을 얻으려면 얼마의 물을 넣어야 하는가?

7. 어떤 기계부분품 하나를 조립하는데 10개의 볼트가 든다. 지금 있는 볼트로 계획한 부분품을 조립하면 5개의 볼트가 모자란다. 그런데 기술혁신을 하여 부분품 하나를 조립하는데 6개의 볼트가 들게 하였다. 그리하여 계획한것보다 5개를 더 조립하고 6번째는 완성하지 못하였다. 처음 몇개 조립할 계획이였는가?

8. 어떤 3각형의 한 변의 길이는 3cm이고 다른 두 변의 길이의 차는 1cm이다. 그리고 이 변들의 길이는 모두 옹근수라고 한다. 3각형의 세 변의 길이를 구하여라.

복 습 문 제

1. 다음 □안에 알맞는 글을 써넣어라.

   1) 방정식을 풀이모임이 같은 방정식으로 고치는것을 방정식을 □한다고 말한다.

   2) 련립방정식에 □ 2개 들어있고 매 방정식이 □ 1일 때 그 련립방정식을 련립두변수1차방정식이라고 부른다.

   3) 련립방정식의 풀이는 매 1차식의 그라프들의 □이다.

2. 옳은 답을 선택하여라.

   1) $2a+3b=-4a$와 $3a-b=-5$가 동시에 성립하게 되는 a, b의 값은 ( )이다.

   ① $a=\frac{1}{2}$, $b=1$　　② $a=1$, $b=\frac{2}{3}$

   ③ $a=-4$, $b=4$　　④ $a=-1$, $b=2$

   2) 방정식 $\begin{cases} 3ax+2by=16 \\ 5ax-3by=33 \end{cases}$의 풀이는 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$이다. 그러면 a, b의 값은 (　　) 이다.

   ① $a=0$, $b=4$　　② $a=6$, $b=-8\frac{1}{2}$

   ③ $a=3$, $b=\frac{7}{4}$　　④ $a=6$, $b=-\frac{1}{2}$

3. x, y가 자연수값만을 잡을 때 다음 방정식의 풀이모임을 구하여라.

   1) $x+y=9$　　2) $5x+y=32$

   3) $xy=8$　　4) $3x+2y=23$

4. 다음 련립방정식을 풀어라.

   1) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{3}(y+2)=2 \\ \frac{1}{4}x-\frac{3}{2}(3y-1)=4 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} \frac{3x-2}{3}+\frac{5y+4}{2}=11 \\ \frac{4y-6}{3}-\frac{5x-y}{2}=-\frac{13}{12} \end{cases}$

   3) $\frac{3x+2}{5}+y-5=\frac{3y+2}{5}+x-7=2y$

5. x, y에 관한 련립방정식

$$\begin{cases} 3x-4y=5 \\ 4x+3y=15 \\ ax+by=5 \\ bx+ay=7 \end{cases}$$

이 풀이를 가진다는것을 알고 a, b의 값을 구하여라.

6. 다음 련립방정식을 그라프로 풀어라.

1) $\begin{cases} x+y=-8 \\ 3y-2x=1 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{9}=0 \\ x+y=-3 \end{cases}$

7. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} 2x-6y+3z=6 \\ 3x+15y+7z=6 \\ 4x-9y+4z=9 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{2}=4 \\ \dfrac{x}{6}-\dfrac{2y}{3}+z=-4 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{8}-\dfrac{z}{5}=-\dfrac{7}{10} \end{cases}$

8. 0 아닌 a, b, c사이에 $\dfrac{a+b}{3}=\dfrac{b+c}{4}=\dfrac{c+a}{5}$인 관계가 있을 때 식 $\dfrac{3a+4b+5c}{5a+4b+3c}$의 값을 구하여라.

9. 다음 안같기식을 풀어라.

1) $(x+2)(x-5)>0$

2) $\dfrac{3x-5}{x+2}>0$　　3) $\dfrac{2x+1}{1-x}\le 0$

10. 학철이와 영숙이가 련립방정식

$$\begin{cases} \square\, x+5y=12 & ① \\ 4x+\square\, y=-2 & ② \end{cases}$$

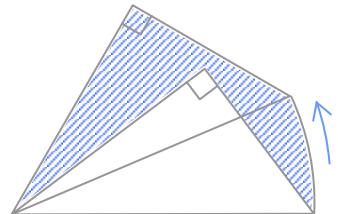
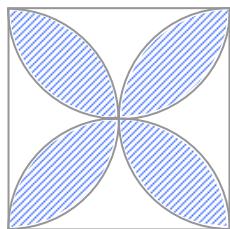
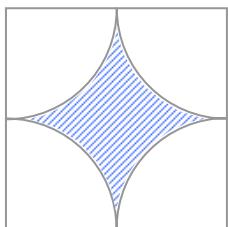
를 풀었다. 학철이는 방정식 ①의 x결수만을 틀리게 보고 풀어서 풀이 $\{(1,\ 2)\}$를 얻었고 영숙이는 방정식 ②의 y결수를 틀리게 보고 풀어서 풀이 $\{(2,\ \frac{2}{5})\}$를 얻었다. 정확한 방정식과 정확한 풀이를 구하여라.

11. 집배가 강을 따라 21km 올라가는데 3시간, 39km 내려오는데 3시간 걸렸다. 흐르지 않는 물에서의 배의 속도와 강물의 속도를 구하여라.

12. 어떤 분수가 있다. 분자에 1을 더하고 분모에서 1을 덜면 그 분수값은 $\frac{2}{3}$로 된다. 그리고 분모에서 분자를 던 차를 분자로 하고 분자와 분모의 합을 분모로 한 분수의 값은 $\frac{2}{5}$이다. 처음 주어진 분수를 구하여라.

13. 질량이 120g인 석과 연으로 된 금속덩어리를 물속에서 달았더니 물밖에서보다 14g 가벼웠다. 그런데 15g의 석과 35g의 연을 물속에서 달아보니 물밖에서보다 각각 2g, 3g씩 가벼웠다. 금속덩어리에는 석과 연이 각각 몇g씩 들어있는가?

14. 크기와 모양이 꼭같은 직6면체가 2개 있다. 이것을 가로 나란히 붙여놓으면 걸면의 면적이 80cm^{2}이고 세로 나란히 붙이면 걸면의 면적이 88cm^{2}로 되며 겹쌓으면 걸면의 면적이 92cm^{2}로 된다. 이 직6면체의 매 면의 면적을 구하여라.

제6장. 면적

다각형의 면적

원둘레의 길이와 원의 면적

제1절. 다각형의 면적

1. 직4각형의 면적

도형의 면적을 재기 위해서는 기준이 되는 바른4각형을 먼저 하나 정하고 그 면적을 1로 한다.(이 바른4각형의 한 변의 길이는 1이다.) 기준으로 잡은 그 바른4각형의 면적을 면적의 단위로 한다.(그림 6－1)

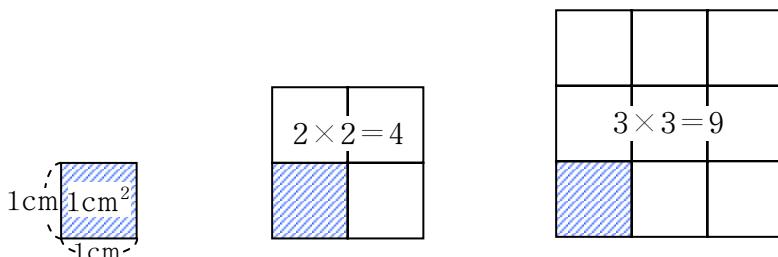



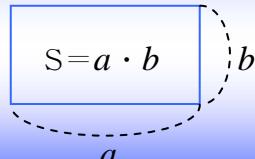
그림 6－1

도형 F에 면적의 단위가 꼭 9개 들어있을 때 도형 F의 면적은 9와 같다고 말하며 일반적으로 n개 들어있을 때 F의 면적은 n과 같다고 말한다.

례 1 변의 길이가 3cm인 바른4각형의 면적은

$$3\text{cm}\times3\text{cm}=9\text{cm}^2$$

례 2 한 변의 길이가 4cm, 다른 한 변의 길이가 6cm인 직4각형의 면적은

$$4\text{cm}\times6\text{cm}=24\text{cm}^2$$

문 제

두 변의 길이가 다음과 같은 직4각형의 면적은 몇cm^2인가?

1) 23cm, 7.9cm

2) 29cm, 0.05cm

3) 2.7km, 3 290m

알아보기

1. 어떤 도형을 평행이동과 회전이동하였을 때 그 도형의 면적이 달라지겠는가를 생각해보아라.
2. 두 변의 길이가 9, 3인 직4각형 ABCD를 그림과 같이 2개의 직4각형 ㄱ), ㄴ)으로 나누었다. (ㄱ)의 면적+ㄴ)의 면적)과 직4각형 ABCD의 면적을 비교해보아라.

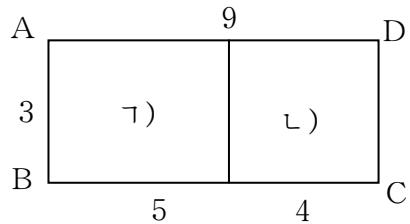
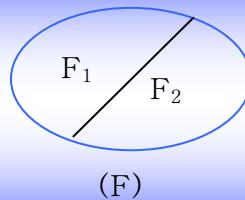



그림 6-2

한 도형 F가 두개의 도형 F_1, F_2로 갈라지면

(F의 면적)=(F_1의 면적)+(F_2의 면적)

알아보기

도형 F_1과 F_2의 겹친 부분은 F_3이다.

(F의 면적)=(F_1의 면적)+(F_2의 면적)−(F_3의 면적)이겠는가?

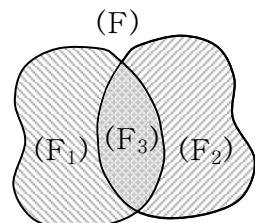



그림 6—3

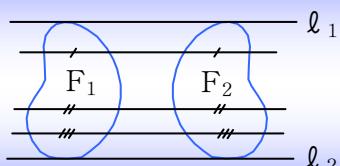
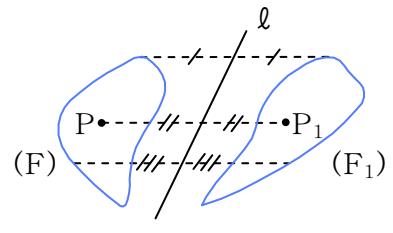
(면적의 원리) 두 평면도형 F_1, F_2를 한 직선우에 놓고 그 직선에 평행인 직선으로 F_1, F_2를 자를 때 매번 그 자름선의 길이가 같으면 F_1, F_2의 면적은 같다.

직선 ℓ이 있다. 도형 F의 매 점 P를 일정한 직선 m에 평행인 방향으로 점 P_1로 옮기되 선분 PP_1이 직선 ℓ에 의하여 2등분 되게 한다. 이때 점 P_1들의 모임이 나타내는 도형을 F_1이라고 하자.(그림 6−4)

그림 6−4

이때 도형 F를 도형 F_1로 넘기는것을 도형 F의 **빗대칭이동**이라고 부르며 직선 ℓ을 **빗대칭축**이라고 부른다.

례 3 그림 6−4에서 m에 평행인 직선으로 도형 F, F_1을 자르면 자름선이 늘 같다. 그리하여

(도형 F의 면적)=(도형 F_1의 면적)

일반적으로 빗대칭이동에 의하여 면적은 달라지지 않는다.

문 제

1. 그림 6−5의 면적은 얼마인가?
2. 직4각형의 면적이 $84.46cm^2$이고 그 한 변은 8.2cm이다. 다른 변을 구하여라.
3. 직4각형의 두 이웃변의 길이가 각각 3배로 되면 면적은 몇배로 되는가? 직4각형의 가로의 길이가 m배, 세로의 길이가 n배로 되면 면적은 몇배로 되는가?
4. 그림 6−6의 도형들을 직선 ℓ을 빗대칭축으로 하여 직선 m의 방향으로 빗대칭이동하여라.

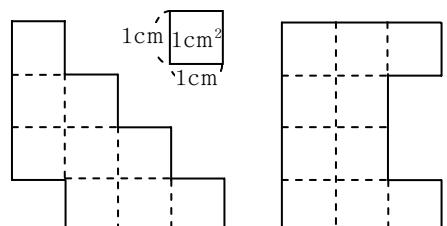



그림 6−5

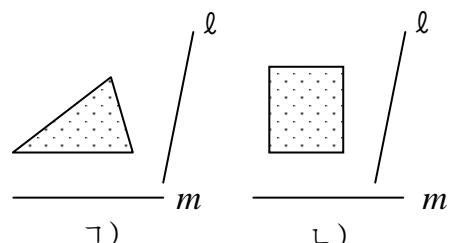
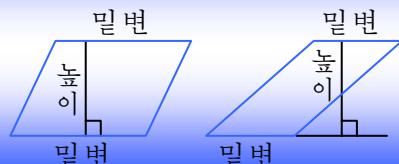



그림 6−6

2. 평행4변형의 면적

1. $\square$ABCD에서 △CDF를 CB의 방향으로 그 길이만큼 평행이동한 도형을 찾아라.
2. 그림 6－7에서 $\square$ABCD의 면적과 직4각형 EBCF의 면적을 비교하여라.

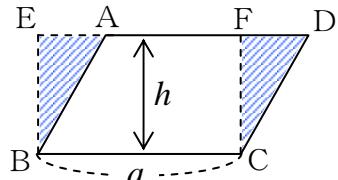
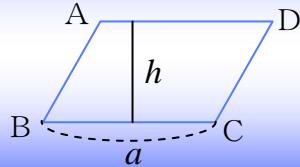



그림 6－7

평행4변형의 면적

평행4변형의 면적은 밑변과 높이와의 적과 같다. 즉

$$S=a\cdot h$$

례 1 밑면의 길이가 25cm, 높이가 0.04m인 평행4변형의 면적 S는

$$S=25cm\times0.04m=25cm\times4cm=100cm^2$$

례 2 그림과 같이 밑면은 두 변이 2m, 1.5m인 직4각형이고 높이는 1m인 직6면체모양의 쇠통그릇을 만들려고 한다.

철판이 얼마나 필요한가?

(풀이) 이 통을 만들려면 직4각형철판 A_1ABB_1, B_1BCC_1를 각각 2개씩 자르고 밑면 ABCD를 자르면 된다.

(A_1ABB_1의 면적)$=2\times1=2$

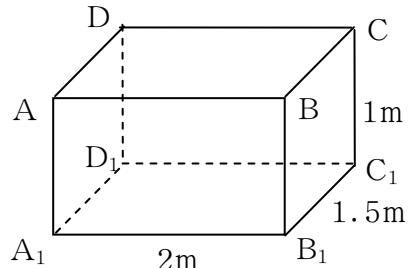
(B_1BCC_1의 면적)$=1.5\times1=1.5$

(ABCD의 면적)$=2\times1.5=3$

따라서 통을 만드는데 드는 철판의 면적은

$$2\times(2+1.5)+3=7+3=10(m^2)$$

그림 6－8

문 제

1. 밑변과 높이가 다음과 같을 때 평행4변형의 면적 S를 구하여라.

1) $a=6$cm, $h=4$cm　　　2) $a=5\frac{5}{6}$m, $h=4\frac{2}{3}$m

2. 그림 6－9에서 AB//DE이다. CD＝EF일 때 ABCD와 ABEF의 면적은 같다. 왜 그런가? 또 4각형 ADCG와 BEFG의 면적을 비교하여라.

3. 그림 6－10에서 $\ell_1 // \ell_2$일 때 평행4변형 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ의 면적을 비교하여라. 어느것이 큰가?

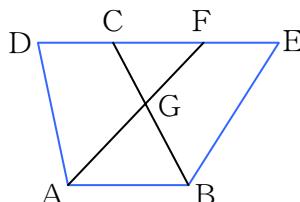
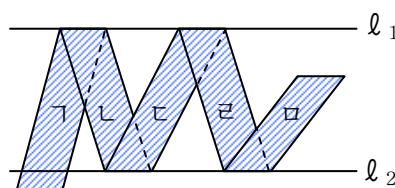
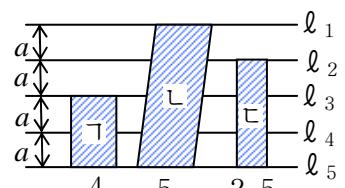



그림 6－9　　그림 6－10　　그림 6－11

4. 그림 6－11에서 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4, ℓ_5는 같은 간격을 가진 평행직선들이다. 세 평행4변형의 면적을 구하여라.(단위는 cm)

5. 그림 6－12는 강재의 자름면이다. 면적을 구하여라.(단위는 cm)

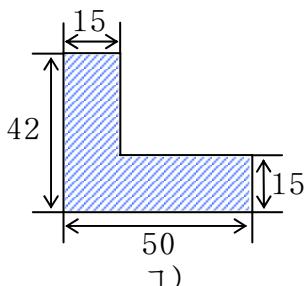
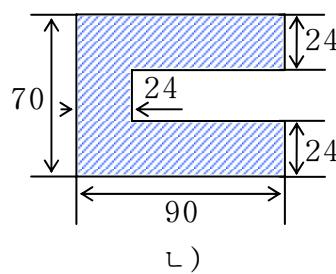
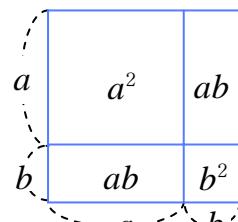



그림 6－12　　그림 6－13

6. 그림 6－13을 보고 다음 같기식이 옳다는것을 설명하여라.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

3. 3각형의 면적

찾기

1. 그림 6－14에서 △ABC와 합동인 3각형을 찾아보아라.

2. △ABC의 면적과 평행4변형 ABCD의 면적을 비교하여라.

3. △ABC의 면적은 $\frac{1}{2}\times4\times2$이라고 말할수 있는가?

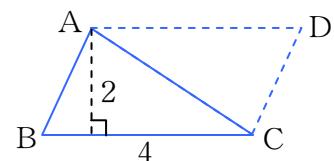
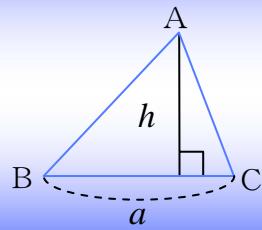



그림 6－14

3각형의 면적

3각형의 면적은 밑변과 높이와의 적의 절반과 같다. 즉

$$S=\frac{1}{2}ah$$

문 제

1. 3각형에서 밑변과 높이가 다음과 같을 때 면적 S를 구하여라.

   1) $a=28$cm, $h=14$cm 　　2) $a=\frac{2}{13}$cm, $h=\frac{3}{4}$cm

2. △ABC의 면적은 $40cm^2$이고 밑변은 5cm이다. 이 3각형의 높이를 구하여라.

3. 그림 6−15에서 $\ell_1 // \ell_2$이다. $△A_1BC$, $△A_2BC$, $△A_3BC$, $△A_4BC$의 면적을 비교하여라. 무엇을 알수 있는가?

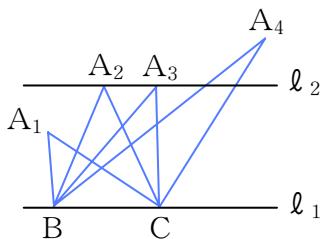



그림 6−15

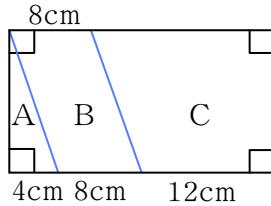



그림 6−16

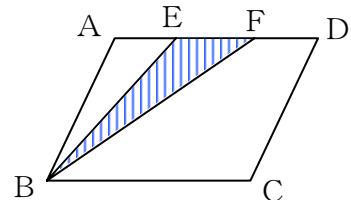



그림 6−17

4. 그림 6−16에서와 같이 직4각형을 A, B, C의 세 부분으로 나누었다. A, B, C의 면적의 비를 구하여라.

5. 평행4변형에서 점 E, F는 변 AD를 셋으로 같게 나누는 점이다. 빗선을 친 부분의 면적은 평행4변형 ABCD의 면적의 몇분의 몇인가?(그림 6−17)

6. 3각형 ABC에 BN, CM을 각각 B, C에서 그은 가운데선이라고 하고 BN, CM의 사귐점을 G라고 할 때 4각형 AMGN와 △BCG의 면적은 같다. 왜 그런가?

7. 3각형 ABC의 변 BC, CA, AB를 연장하고 거기에 CD=BC, AE=AC, BF=AB되게 할 때 3각형 DEF의 면적은 3각형 ABC의 면적의 몇배인가?

4. 피다고라스의 공식

1. 그림 6－18의 ㄱ)과 같이 ∠A＝∠R, b＝3cm, c＝4cm인 직3각형 ABC를 그리고 빗변 a의 길이를 재였더니 5cm였다. 이때 a^2과 b^2+c^2는 어떤 관계에 있는가?
2. 그림 6－18의 ㄴ)에서 ADEF는 ㄱ)에서 $b+c$를 한 변으로 하는 바른4각형이다. 이때 다른 바른4각형을 찾아라.

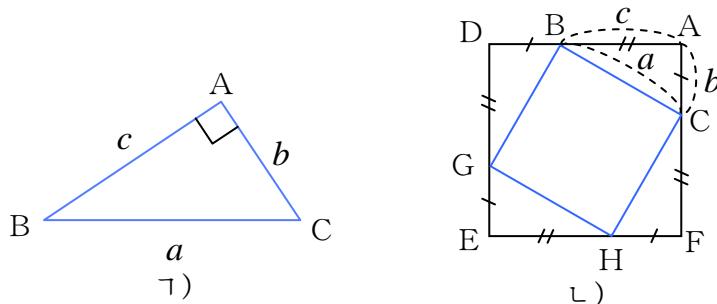



그림 6－18

그림 6－18의 ㄴ)에서

바른4각형 ADEF의 면적$=5^2+4\times\dfrac{4\times3}{2}=5^2+2\times4\times3$

ADEF의 면적$=(4+3)^2$

즉 $5^2+2\times4\times3=3^2+4^2+2\times4\times3$

$$5^2=4^2+3^2$$

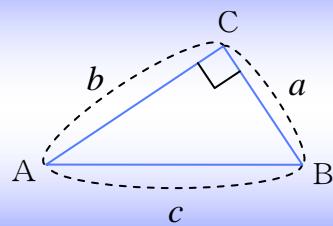
따라서 직각변의 길이가 3, 4, 빗변의 길이가 5인 직3각형에서 빗변의 2제곱은 두 직각변의 2제곱과 같다.

피다고라스의 공식

직3각형에서 빗변의 2제곱은 두 직각변의 2제곱의 합과 같다.

즉 △ABC에서

∠C＝∠R이면 $c^2=b^2+a^2$

문 제

1. 직3각형에서 두 직각변 a, b가 다음과 같을 때 빗변의 2제곱을 구하여라.

   1) $a=1.2$, $b=3.5$　　　　　　2) $a=15$, $b=36$

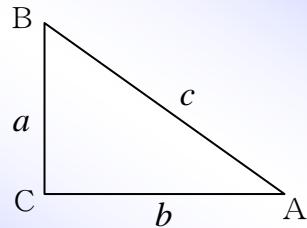
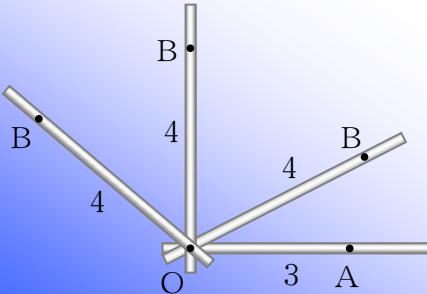
2. cm눈금자와 콤파스를 가지고 직각을 어떻게 그릴수 있는가?

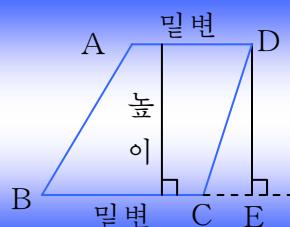
3. 피다고라스의 공식을 밝혀내는 방법은 400여가지가 있다. 그가운데서 한가지 방법을 더 써서 알아보아라.

그림과 같이 OA=3cm, OB=4cm인 토막이 O에서 돌게 되여있다.

1) OB를 돌려 ∠AOB가 90°보다 작을 때, 클 때 AB의 길이를 재여보아라.

2) AB=5cm일 때 ∠AOB=∠R이겠는가?

   △ABC에서 $a^2+b^2=c^2$이면 ∠C=∠R이겠는가?

5. 제형의 면적

제형에서 두 밑변 또는 그 연장선사이의 거리를 제형의 높이라고 부른다.

찾기 그림 6－19에서 △ABC와 △ADC의 높이는 제형의 높이와 같다. 이때 (제형 ABCD의 면적)＝(△ADC의 면적)＋(△ABC의 면적)이다.

(제형 ABCD의 면적)$=\frac{1}{2}\times(3+5)\times4$인가를 알아보아라.

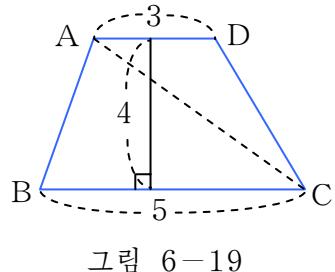
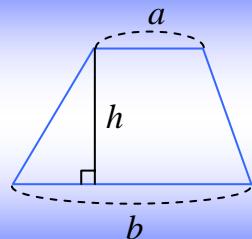



그림 6－19

제형의 면적

제형의 면적은 두 밑변의 합과 높이와의 적의 절반과 같다. 즉

$$S=\frac{1}{2}(a+b)h$$

례 두 밑변이 7cm, 3cm, 옆변이 5cm이고 ∠C＝∠R, AD//BC인 제형의 면적을 구하여라.

(풀이) A에서 BC에 수직선을 내려 밑점을 E라고 하자. 이때 AD＝EC이므로

$$BE=BC-EC=7-3=4$$

따라서 직3각형 AEB에서 피다고라스의 공식으로부터

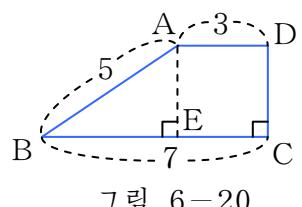
$$AB^2=AE^2+BE^2$$

$$5^2=AE^2+4^2,\qquad AE=3$$

따라서 제형 ABCD의 면적 S는

$$S=\frac{1}{2}\times(3+7)\times3=15(\text{cm}^2)$$

그림 6－20

문 제

1. 제형에서 밑변과 높이가 다음과 같을 때 면적 S를 구하여라.

   1) $a=6$m, $b=5$m, $h=0.51$m

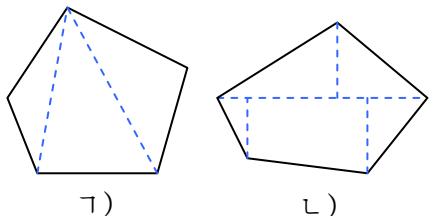
   2) $a=0.34$m, $b=1.56$m, $h=0.51$m

2. 제형 ABCD의 밑변 AD, BC의 가운데점 M, N을 맺는 직선이 이 제형의 면적을 2등분 한다는것을 밝혀라.

6. 다각형의 면적

다각형의 면적을 구하려면 그 다각형을 몇개의 3각형이나 제형으로 나누고 그 면적들을 계산하여 더하면 된다.(그림 6−21)

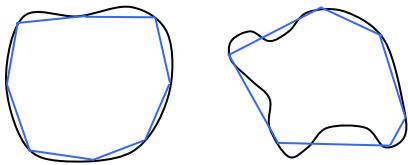
그림 6−21

곡선도형의 면적은 다음과 같은 방법으로 구한다.

1) 먼저 주어진 도형에 가까운 다각형을 그린다.

2) 그 다각형의 면적을 구한다.

이렇게 하여 얻은 면적을 주어진 도형의 면적의 근사한 값으로 잡는다.(그림 6−22)

그림 6−22

문 제

1. 그림 6−23의 도형의 면적을 구하여라.(단위는 m)
2. 다각형 ABCDE가 있다. BC=4cm, CD=6cm, DE=5cm이고 정점 A로부터 이 변들까지의 거리는 각각 3cm, 8cm, 6cm이다. 이 다각형의 면적을 구하여라.(그림 6−24)

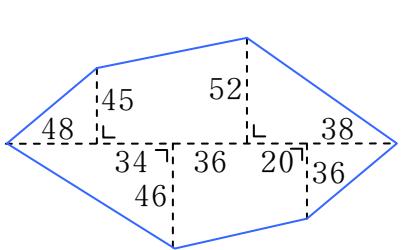
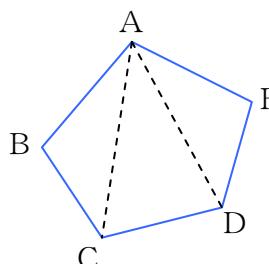
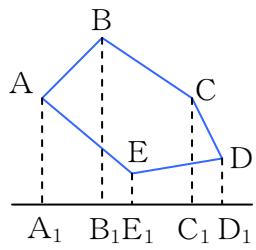



그림 6−23 그림 6−24 그림 6−25

3. 그림 6−25에서 다각형 ABCDE의 면적을 구하기 위하여 제형 AA_1B_1B, BB_1C_1C, CC_1D_1D, DD_1E_1E, EE_1A_1A의 면적을 먼저 계산하였다. 이 제형의 면적들로부터 주어진 다각형의 면적을 어떻게 구할수 있겠는가?

탐구

3각형, 제형, 평행4변형, 직4각형, 바른4각형에서는 두 옆변의 가운데점을 맺는 선분인 중간선분을 생각할수 있다. 이 도형들의 아래밑변, 웃밑변, 높이를 각각 a_1, a_2, h로 표시하고 중간선분을 a_0이라고 하면 면적 S가 다음과 같은가를 알아보아라.

$$S=\frac{1}{6}h(a_1+4a_0+a_2)$$ (씸프슨의 만능면적공식)

3각형은 웃밑변이 줄어든것으로 볼수 있으므로 $a_2=0$으로 본다.

련습문제

1. △ABC가 있다. 가운데선 AM에 임의의 점 D를 찍어도 △ABD와 △ADC의 면적은 같다. 왜 그런가?(그림 6-26)
2. 그림 6-27에서 AC//DE이다.
   1) △ADC와 △AEC의 면적은 같은가?
   2) △ABE의 면적은 4각형 ABCD의 면적과 같다. 왜 그런가?

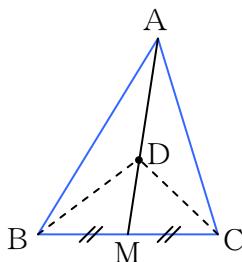



그림 6-26

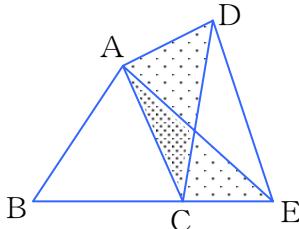
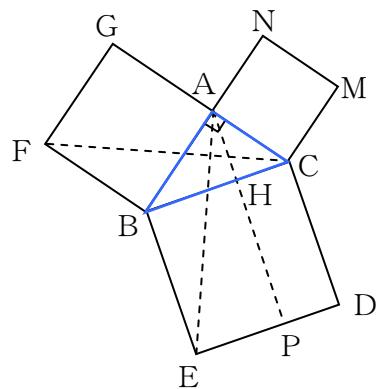



그림 6-27

그림 6-28

3. △ABC에서 ∠A=∠R이고 4각형 ABFG와 4각형 BEDC는 각각 AB 및 BC를 한 변으로 하는 바른4각형이다. H, P는 A에서 BC에 그은 수직선이 BC, ED와 사귀는 점들이다. (그림 6-28)
   1) △ABE≡△FBC라고 말할수 있는가?
   2) 직4각형 BEPH의 면적과 △ABE의 면적을 비교하여보아라.
   3) 바른4각형 ABFG의 면적과 △FBC의 면적을 비교하여보아라.

4. 그림 6－29에서 △ABC의 아낙각 A는 직각이고 4각형 ABFG, BCDE, CMNA는 모두 바른4각형이다. 문제 3의 결과를 써서 (4각형 BCDE의 면적)＝(ㄱ의 면적)＋(ㄷ의 면적)이라는것을 설명하여라.

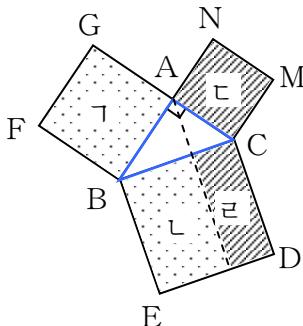
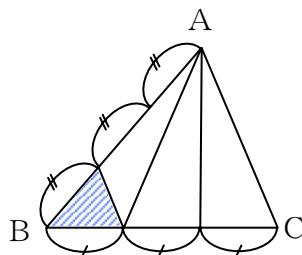
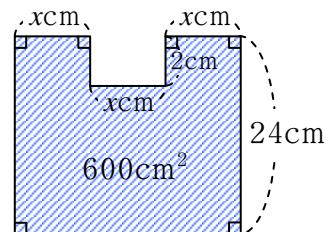



그림 6－29　　그림 6－30　　그림 6－31

5. 그림 6－30에서 빗선을 친 부분은 △ABC의 면적의 몇분의 몇인가?

6. 그림 6－31에서 x를 구하여라.

7. △ABC의 변 BC의 가운데점을 M, 선분 BM의 임의의 점을 P라고 하고 M을 지나서 AP에 평행인 직선이 변 AC와 사귀는 점을 Q라고 한다. 이때 PQ는 △ABC의 면적을 2등분한다. 왜 그런가?(그림 6－32)

그림 6－32

8. 그림 6－33에서 4각형 ABCD는 평행4변형이다. 대각선 AC에 평행인 직선을 그어 AB, BC와 사귀는 점을 각각 E, F라고 할 때 △ADE와 △CDF의 면적이 같다. 왜 그런가?

9. 평행4변형 ABCD의 변 AB의 임의의 점 E를 잡고 E와 C를 맺는다. CE를 연장하여 DA의 연장선과 사귄 점을 F라고 한다. 이때 △ADE와 △FBE의 면적은 같다. 왜 그런가?(그림 6－34)

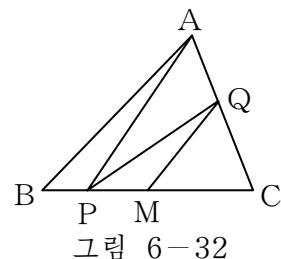
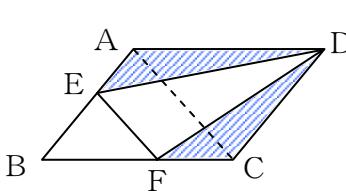
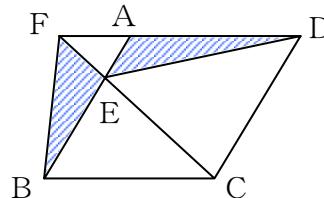
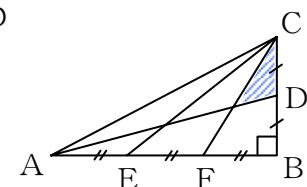



그림 6－33　　그림 6－34　　그림 6－35

10. △ABC에서 ∠B＝90°, AB＝9cm, BC＝3cm이다. D는 BC의 가운데점이고 E, F는 변 AB를 3등분한 점들일 때 빗선을 친 3각형의 면적을 구하여라.(그림 6－35)

11. 평행4변형 ABCD에서 대각선의 사귐점을 O라고 하고 3각형 OAB안의 한 점을 P라고 하자. 이때

(△PCD의 면적)=(△PAB의 면적)+(△PAC의 면적)+□

가 되자면 □안에 다음 3각형들가운데서 어느 3각형의 면적을 더해야 하겠는가?

1) △AOD 2) △OCD 3) △PAD 4) △PBD

12. 4각형 ABCD안의 아무런 점을 P라고 할 때 △APB의 면적과 △PCD의 면적을 더한 합이 늘 같으면 이 4각형은 어떤 4각형인가?

13. 3각형 ABC의 밑변 BC에 아무런 점 D를 정하고 B, C로부터 DA에 평행인 직선을 그어 CA, BA의 연장선과 각각 E, F에서 사귄다고 하면

(△DEF의 면적)=2×(△ABC의 면적)

이다. 왜 그런가?

14. 2m, 3m인 두 막대기의 한끝을 일치시키고 두 막대기에 의하여 만들어지는 각(막대기사이의 각)을 변화시키면서 막대기들의 다른 끝을 맺으면 무수히 많은 3각형이 얻어진다. 막대기사이의 각이 얼마일 때 그것들에 의하여 만들어지는 3각형의 면적이 제일 큰가?

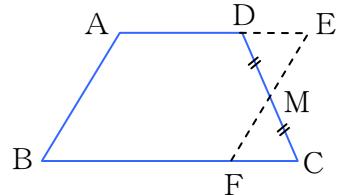
15. 4각형 ABCD를 그리고 그것과 같은 면적을 가지는 3각형을 그려라.

16. 제형 ABCD(AD//BC)가 있다. 옆변 DC의 가운데점 M을 지나 AB에 평행인 직선을 그어 AD, BC 또는 그 연장선과 사귀는 점을 각각 E, F라고 한다. 이때 다음것을 따져보아라.(그림 6−36)

1) △MED≡△MFC

2) $BF=\frac{1}{2}\times(AD+BC)$

그림 6−36

3) (제형 ABCD의 면적)=(평행4변형 ABFE의 면적)

17. 그림 6−37에서 AD//BC이다. DC의 가운데점을 P라고 하면 (△ABP의 면적)$=\frac{1}{2}\times$(제형 ABCD의 면적)임을 밝혀라.

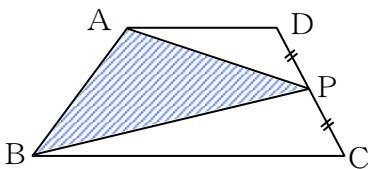



그림 6−37

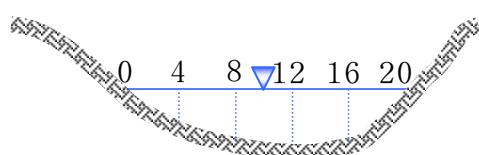



그림 6−38

18. 그림 6−38과 같은 강의 자름면을 따라 강물의 깊이를 재여 얻은 표가 다음과 같다. 이 자름면의 면적은 얼마인가?

강기슭으로부터의 거리(m)	0	4	8	12	16	20
깊이(m)	0	2.4	3.2	4.8	4.8	0

제2절. 원둘레의 길이와 원의 면적

1. 원둘레의 길이

해보기 반경이 r인 원을 눈금자를 따라 한바퀴 굴리여 둘레의 길이 ℓ을 다음과 같이 구하였다.

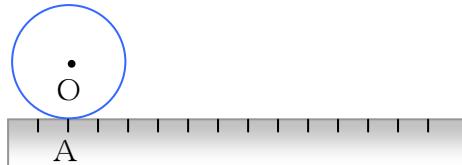



그림 6−39

r	3	4	5	6
ℓ	18.84	25.12	31.41	37.67

이때 $\frac{\ell}{2r}$을 구해보아라. 무엇을 알수 있는가?

원 O에서 원둘레의 길이 ℓ과 직경 2r의 비는

$$\frac{\ell}{2r}=3.14159265358\cdots$$

인 상수이다. 이것을 **원둘레률**이라고 부르고 π로 표시한다.

그러면 $\ell=2\pi r$

례 1 반경이 50cm인 나무의 둘레의 길이를 구하자.

(풀이) 둘레의 길이 ℓ은

$$\ell = 2\pi \cdot 50 \approx 314(\text{cm})$$

그림 6－40

원에서 중심각과 그에 대한 활등의 길이는 비례하므로 원둘레의 길이를 알면 중심각에 대한 활등의 길이를 구할수 있다.

반경이 r, 둘레가 ℓ인 원에서 $x°$의 중심각에 대한 활등의 길이를 C라고 하면 중심각 1°에 대한 활등의 길이는 $\frac{\ell}{360}$이므로 중심각 $x°$에 대한 활등의 길이는

$$C = \frac{\ell x}{360}$$

또는 $C = \frac{2\pi r x}{360} = \frac{\pi r x}{180}$

즉 $C = \frac{\pi r x}{180}$

례 2 반경이 10cm인 원에서 60°인 중심각에 대한 활등의 길이를 구하여라.

그림 6－41

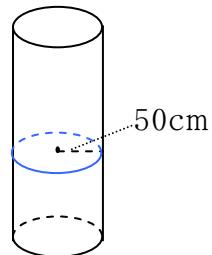
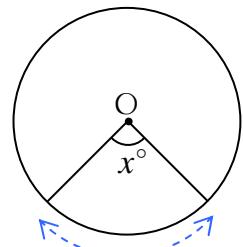
(풀이) $C = \frac{\pi r x}{180}$

여기서 $r = 10\text{cm}$, $x = 60$이므로

$$C = \frac{\pi \times 10 \times 60}{180} = \frac{10\pi}{3}$$

$\pi \approx 3.14$라고 하면

$C \approx 10.47(\text{cm})$

문 제

1. 반경이 8cm인 원에서 45°인 중심각에 대한 활등의 길이는 얼마이겠는가?
2. 반경이 10cm인 원에 길이가 15.7cm인 활등이 있다. 이 활등에 대한 중심각을 구하여라.
3. 그림 6－42와 같은 도형의 테두리선의 길이를 구하여라.
4. 직경이 20cm인 세개의 통나무가 있다. 이것을 그림 6－43과 같이 쇠줄로 묶으려 한다. 한번 감는데 쇠줄이 얼마나 들겠는가?

5. 그림 6－44는 건설에 쓸 관의 한 부분이다. 이 관의 길이(중심선의 길이)를 구하여라.(단위는 m)

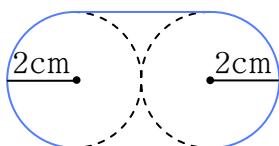
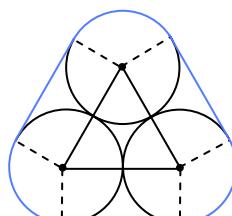



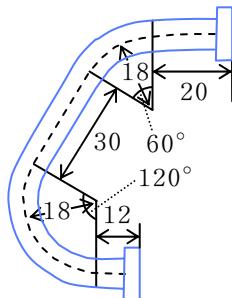
그림 6－42 그림 6－43 그림 6－44

2. 원의 면적

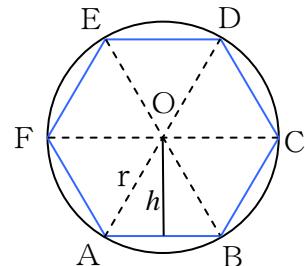
그림 6－45

그림 6－45는 원둘레 O에 정점이 놓이는 바른6각형이다.

이 바른6각형의 면적은

$$\frac{1}{2}h(AB+BC+CD+DE+EF+FA)$$

바른다각형의 변의 개수를 한없이 늘여가면 △OAB의 높이 h는 원의 반경 r와 같아지고 바른다각형의 둘레 AB＋BC＋CD＋DE＋EF＋FA＋ …은 원의 둘레 $2\pi r$로 될것이다. 그리고 이때 바른다각형의 면적은 원의 면적 S로 된다.

따라서 $S=\frac{1}{2}r\cdot 2\pi r$로 된다.

원의 면적

원의 면적은 반경의 2제곱에 원둘레률 π를 곱한 적과 같다. 즉

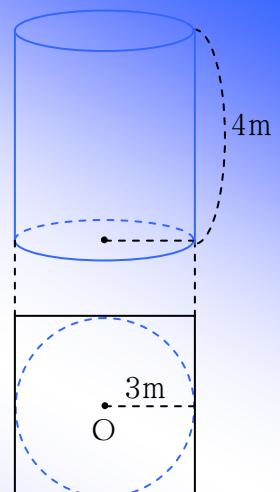
$$S=\pi r^2$$

탐구

밑면의 반경이 3m이고 높이가 4m인 원기둥모양의 탕크를 만들려고 한다. 이 통을 만드는데 직4각형모양의 철판 한개와 원모양의 철판 2개가 있어야 한다. 어떤 모양의 규격철판이 있어야 하겠는가?

다음것을 알아보고 구하려는 규격의 철판개수를 생각해보아라.

1) 밑면은 한 변의 길이가 몇m인 바른4각형으로부터 잘라낼수 있는가?

2) 옆면은 가로세로가 얼마인 직4각형인가?

원의 면적공식에 의하여 부채형의 면적을 구할수 있다. 원의 반경을 r, 면적을 S라고 하면 중심각이 1°인 부채형의 면적은 $\frac{S}{360}$이다.

그러므로 중심각이 x°인 부채형의 면적 M은

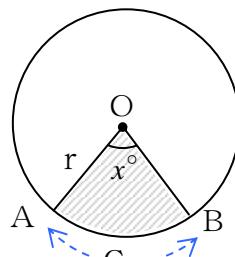
$$M=\frac{Sx}{360}$$

여기서 $S=\pi r^2$이므로 $M=\frac{\pi r^2 x}{360}$

그림 6-46

부채형의 면적은 활등의 길이를 써서 표시할수도 있다. 활등 $\overset{\frown}{AB}$의 길이를 C라고 하면 $C=\frac{\pi r x}{180}$, $M=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi r x}{180}\cdot r$

부채형의 면적

부채형의 면적은 그 활등과 반경과의 적의 절반과 같다. 즉

$$M=\frac{1}{2}Cr$$

례 반경이 5cm이고 중심각이 30°인 부채형의 면적을 구하여라.

(풀이) $M=\frac{\pi r^2 x}{360}$에서 r=5cm, x=30이므로

$$M=\frac{\pi\times5^2\times30}{360}=\frac{25\pi}{12}$$

$\pi\approx3.14$라고 하면

$$M=\frac{25\times3.14}{12}\approx6.54(\mathrm{cm}^2)$$

문 제

1. 그림 6-47에서 빗선을 친 부분의 면적을 구하여라.
2. 반경이 10cm이고 중심각이 120°인 부채형이 있다. 이 부채형의 면적을 구하여라.

3. 반경이 2.5cm, 활등이 4.4cm인 부채형의 면적을 구하여라.

4. 그림 6-48과 같은 직4각형구역의 바깥에 1m의 너비의 꽃밭을 만들려고 한다. 꽃밭의 면적을 구하여라.

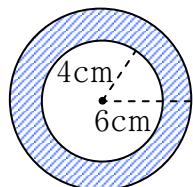



그림 6-47

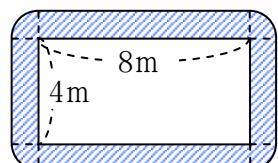



그림 6-48

상식

우리 나라 수학자 홍대용

우리 나라의 수학자 홍대용(1731년-1783년)은 량반가정에서 자랐지만 벼슬을 하지 않고 일생을 학문연구에 바쳤다. 그는 그때까지 도달한 수학의 수준들을 참고하여 독자적인 체계를 세워 수학책 《주해수용》을 만들었다. 책은 내편과 외편으로 되어있는데 내편에서는 대수, 기하, 삼각 등의 원리적인 문제들을 취급하였고 외편에서는 토지면적계산법, 천체계산법을 비롯한 여러 분야의 응용문제들을 취급하였다. 그는 수학이 철저히 실천에 복무해야 한다고 주장하면서 현실에 알맞고 리용에 적합한 수학적 수법들을 추려내여 자기의 새로운 수학체계를 구성하였다. 이 책을 통하여 수학자 홍대용의 뛰여난 재능과 풍부한 지식, 당시 우리 나라 수학의 발전 수준에 대하여 짐작할수 있다.

련 습 문 제

1. 활등의 반경은 바른4각형의 한 변 a와 같다. 빗선을 친 부분의 둘레의 길이를 구하여라.(그림 6－49)

2. 빗선친 부분의 둘레의 길이를 구하여라.(그림 6－50)

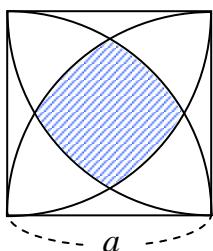
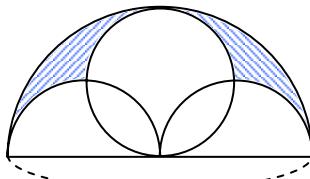
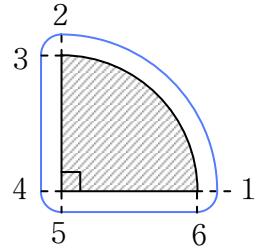



그림 6－49　　그림 6－50　　그림 6－51

3. 반경이 1cm인 원이 그림 6－51과 같은 부채형의 둘레를 한바퀴 돌 때 원의 중심이 지나간 길의 길이를 구하여라.(부채형의 반경은 4cm)

4. 빗선친 부분의 면적을 구하여라.(그림 6－52, 53)

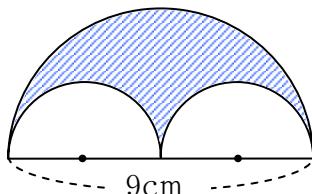



그림 6－52

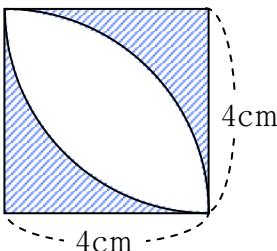
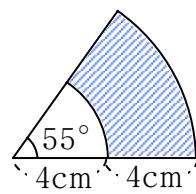



그림 6－53

5. 그림 6－54에서 빗선친 부분의 면적과 둘레의 길이를 구하여라.

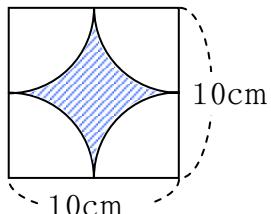
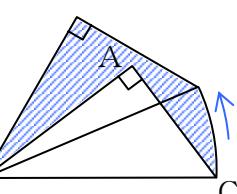
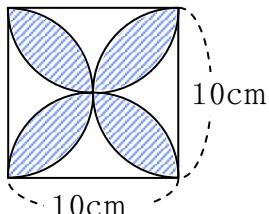



그림 6－54　　그림 6－55

6. 그림 6－55는 AB＝8cm, AC＝6cm인 직3각형 ABC가 정점 B를 중심으로 하여 30° 회전하여 얻어진 도형이다. 빗선친 부분의 면적을 구하여라.

7. 빗선친 부분의 면적을 구하여라.

1) 2) 3)

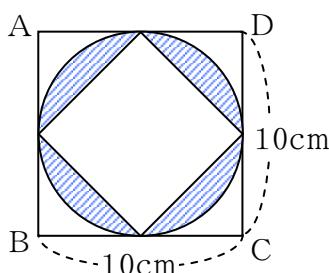
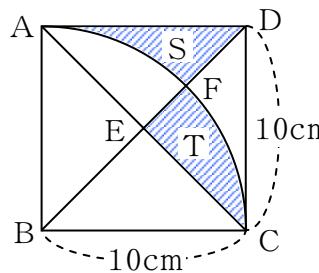
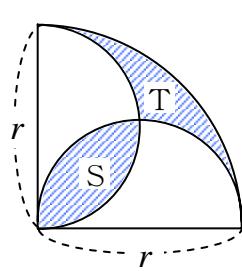



그림 6－56 그림 6－57 그림 6－58

8. 그림 6－59에서 빗선을 친 두 부분의 면적이 같을 때 x의 길이를 구하여라.

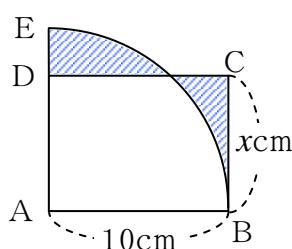
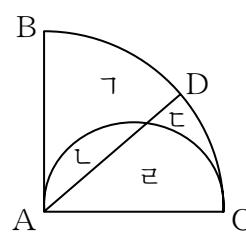
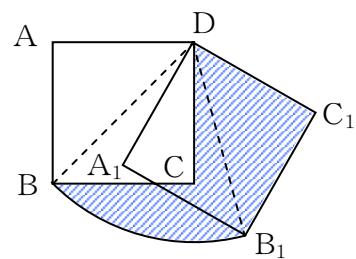



그림 6－59 그림 6－60 그림 6－61

9. 그림 6－60과 같이 중심각이 90°인 부채형을 4개의 부분으로 나누었다. ㄴ과 ㄷ의 면적이 같게 하려면 부채형 ACD의 중심각을 얼마로 해야 하는가?

10. 바른4각형 ABCD에서 대각선 BD＝6cm이고 점 D를 중심으로 그 바른4각형을 60° 회전이동하였다. 빗선친 부분의 면적은 얼마인가?(그림 6－61)

11. 그림 6－62에서 제형 ABCD의 밑변 AD＝6cm, BC＝12cm, 높이 AB＝6cm이다. 점 B를 중심으로 제형 ABCD를 60° 회전이동하였다. 빗선을 친 부분의 면적을 구하여라.

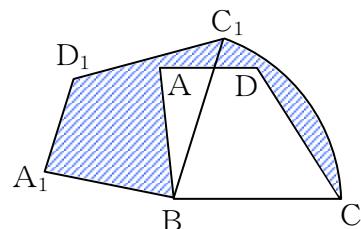



그림 6－62

복 습 문 제

1. △ABC의 변 BC에 점 M이 있다. BM과 MC의 길이가 3과 2, 높이가 2이면 △ABM과 △AMC의 면적의 비는 얼마인가?(그림 6－63)

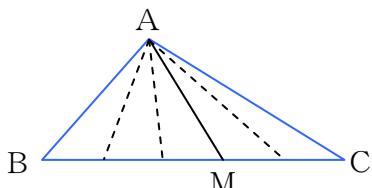



그림 6－63

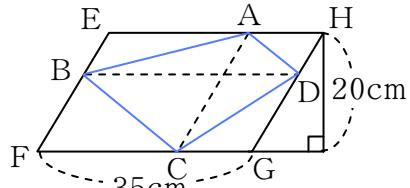



그림 6－64

2. 4각형 ABCD의 면적을 구하기 위하여 정점 A, C에서 대각선 BD에 평행인 직선을 긋고 정점 B, D에서 대각선 AC에 평행인 직선을 그어 평행4변형 EFGH를 얻었다. 이 평행4변형의 밑변이 FG＝35cm, 높이가 20cm일 때 4각형 ABCD의 면적을 구하여라.(그림 6－64)

3. 그림 6－65와 같은 4각형 ABCD가 있다. 대각선 AC의 가운데점을 M이라고 하면 4각형 ABMD의 면적은 4각형 ABCD의 면적의 절반과 같다. 왜 그런가?

4. △ABC에서 변 BC의 가운데점을 M, AM의 가운데점을 D라고 하면

(△ABD의 면적)＝(△CDM의 면적)

임을 밝혀라.(그림 6－66)

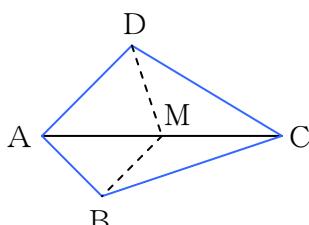



그림 6－65

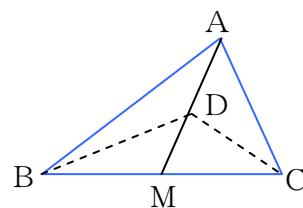



그림 6－66

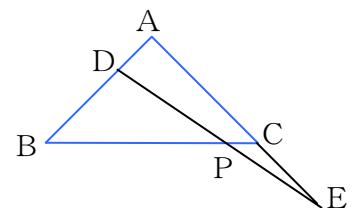



그림 6－67

5. 직2등변3각형 ABC에서 ∠A＝∠R이다. 변 AB에서 점 D를 잡고 변 AC의 연장선에서 CE＝BD 되게 점 E를 잡았다. 변 BC와 선분 DE의 사귐점을 P라고 할 때 △BDP와 △CEP의 면적의 차를 선을 그어 표시하여라.(그림 6－67)

6. 그림 6－68과 같이 평행4변형 ABCD의 변 AD에 AE:ED＝2:1로 되는 점 E를 잡고 선분 AC와 선분 BE와의 사귐점을 P라고 한다. △APE의 면적이 $10cm^2$일 때 △ABP의 면적을 구하여라.

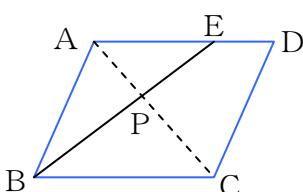



그림 6－68

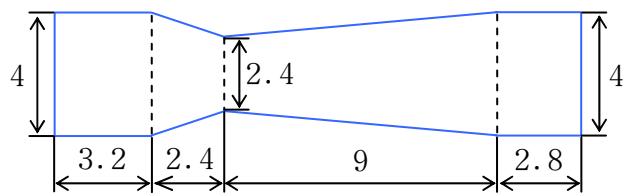



그림 6－69

7. 자름면이 그림 6－69와 같은 기계부분품이 있다. 이 자름면의 면적을 구하여라.

8. △ABC는 밑변 BC가 6cm, 높이 AH가 4cm이다. 이 3각형안에 그림 6－70과 같은 바른4각형 PQRS를 그리려고 한다. 이 바른4각형의 한 변의 길이를 구하여라.

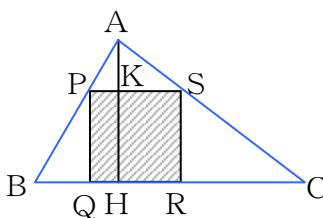



그림 6－70

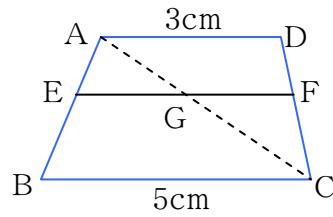



그림 6－71

9. 제형에서 AD＝3cm, BC＝5cm, AD//EF//BC, $\frac{AE}{EB}=\frac{2}{3}$일 때 다음것을 구하여라.(그림 6－71)

1) $\frac{AG}{GC}$　　2) $\frac{CF}{CD}$　　3) EG의 길이　　4) GF의 길이

10. 그림 6－72와 같이 반원을 3개 붙인 길이 있다. A에서 G까지 가는데 7개의 기발이 같은 간격으로 꽂혀있다.

① 기발 A가 있는 곳에서 떠나 다른 기발을 한개씩 A에 모아오는데 모든 기발을 다 모아오려면 몇m 걸어야 하는가?

② 우에서와 같이 기발을 모을 때 어느 기발이 있는 곳에 모아야 걷는 거리가 가장 짧겠는가?

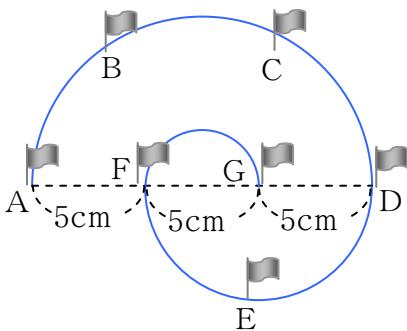



그림 6－72

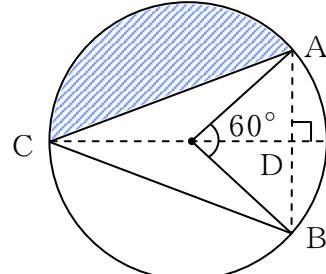
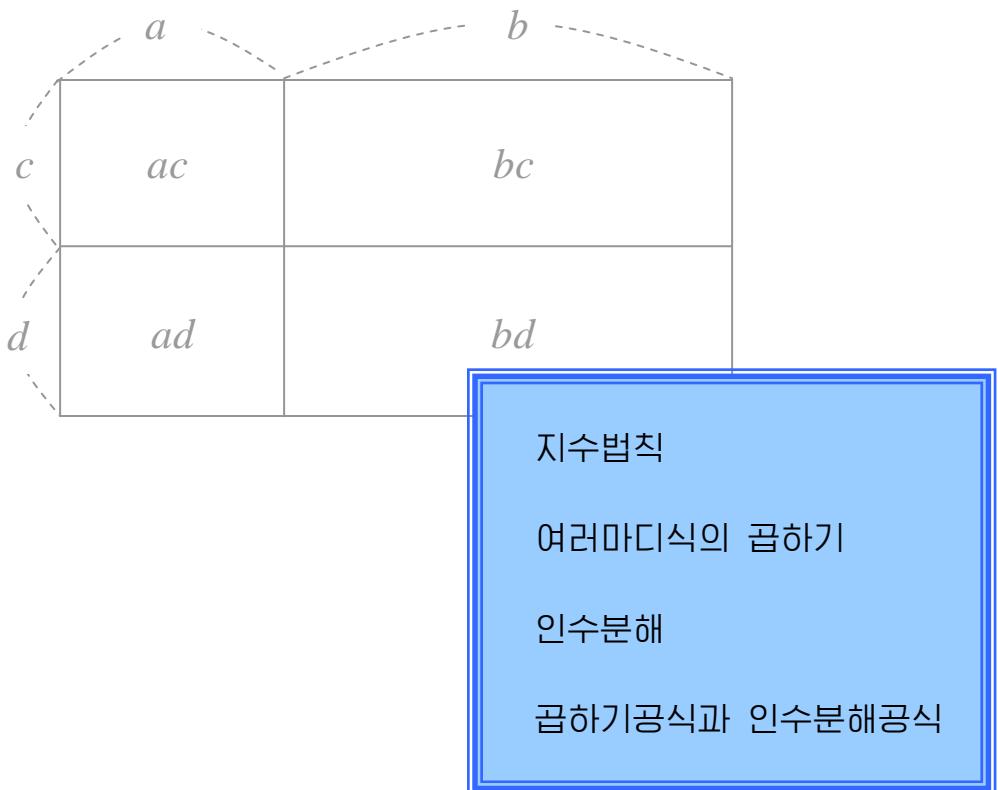



그림 6－73

11. 반경이 r인 원에 중심각이 30°인 부채형이 겹쳐있다. 빗선을 친 부분의 면적을 구하여라.(그림 6－73)

제7장. 여러마디식의 곱하기와 인수분해

$$(a+b)(c+d)=$$
$$ac+ad+bc+bd$$

제1절. 지수법칙

1. 밑수가 같은 제곱들의 곱하기

해보기 □에 알맞는 수를 써넣어라.

$a^2 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$, $a^3 \cdot a^5 = a^{\square}$

$b^2 \cdot b^3 \cdot b^4 = b^{\square}$

밑수가 같은 제곱끼리 곱할 때에는 지수끼리 더한다.

례 $3^5 \cdot 3^2 = 3^{5+2} = 3^7$

$x^4 \cdot x^2 \cdot x^5 = x^{4+2+5} = x^{11}$

문 제

1. 다음 식을 하나의 제곱을 써서 간단히 하여라.

1) $\left(-\frac{10}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^7$　　2) $x^4 \cdot x \cdot x^3$

3) $(2x)^4(2x)^3(2x)^6$　　4) $(a+b)^3(a+b)$

5) $a^{n+1} \cdot a^{n-2}$　　6) $(x-y)^n(x-y)(x-y)^{n-1}$

2. □안에 알맞는 수를 써넣어라.

1) $16 = 2^{\square}$　　2) $32 = 2^{\square}$　　3) $81 = 3^{\square}$

4) $81 = \square^2$　　5) $0.25 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\square}$　　6) $2.25 = \square^2$

3. □안에 알맞는 수를 써넣어라.

1) $16 \cdot 32 = 2^{\square}$　　2) $36 \cdot 64 = \square^2$　　3) $125 \cdot 25 = 5^{\square}$

4) $81 \cdot 243 = \square^9$　　5) $625 \cdot 625 = \square^4$　　6) $4 \cdot 64 \cdot 128 = 2^{\square}$

4. 다음 식을 계산하여라.

1) $3^2 \cdot (-56)^7 + (-3)^2 \cdot 56^7$　　2) $\left(-\frac{3}{4}\right)^9 \cdot 5^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^9 \cdot (25)^4$

3) $4 \cdot (1.5)^3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$　　　　4) $65^4 - (-65)^4$

5. x를 구하여라.

1) $2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^7 = 2^x$　　　　2) $2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^7 \cdot 2^9 = 2^{x-3}$

3) $2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^7 \cdot 2^9 \cdot 2^{11} = 2^{3x}$　　　　4) $2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^7 \cdot \cdots \cdot 2^{99} = 2^{2x}$

2. 밑수가 같은 제곱들의 나누기

해보기 □안에 알맞는 수를 써넣어라. 무엇을 알수 있는가?

1) $\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a^{\square}$　　　　2) $\frac{a^8}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = a^{\square}$

3) $\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots\cdots a \cdot a}^{m}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots\cdots a \cdot a}_{n}} = a^{\square} (m > n)$

밑수가 같은 제곱끼리 나눌 때는 지수끼리 던다.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \ (m > n)$$

례 $\frac{6^5}{6^3} = 6^{5-3} = 6^2$,　　　　$\frac{(2a)^4}{(4a)^2} = \frac{2^4 \cdot a^4}{4^2 \cdot a^2} = a^2$

문 제

다음 식을 하나의 제곱으로 표시하여라.

1) $\frac{a^{21}}{a^{12}}$　　　　2) $\frac{(2a)^{16}}{(2a)^{14}}$　　　　3) $\frac{(a+b)^4}{a+b}$

알아보기 다음것이 옳은가를 따져보아라.

$$\frac{3^{10}}{3^{12}}=\frac{3^{10}}{3^{10}\cdot 3^{2}}=\frac{1}{3^{2}}=\frac{1}{3^{12-10}},\quad \frac{a^{18}}{a^{23}}=\frac{a^{18}}{a^{18}\cdot a^{5}}=\frac{1}{a^{5}}=\frac{1}{a^{23-18}}$$

$\frac{a^m}{a^n}$ $(m<n)$일 때는 $\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^m\cdot a^{n-m}}=\frac{1}{a^{n-m}}$

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}\ (m<n)$$

례 $\frac{5^2}{5^8}=\frac{1}{5^{8-2}}=\frac{1}{5^6}$

문 제

1. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\frac{3^2}{3^5}$ 2) $\frac{(-5)^4}{5^6}$ 3) $\frac{2^{10}\cdot 2^5}{2^8\cdot 2^9}$

4) $\frac{5\cdot 125\cdot 5^7}{5^{12}}$ 5) $\frac{2^5}{4\cdot 32}$

2. 다음 식을 계산하여라.

1) $\frac{(a+b)^2}{(a+b)^5}=\frac{1}{(a+b)^{5-2}}=\frac{1}{(a+b)^3}$ 2) $\frac{3^2\cdot 81}{3^7\cdot 27}$

3) $\frac{13^2\cdot 13^7}{13^{10}\cdot 169}$ 4) $\frac{(x-y)^7\cdot(x-y)^{10}}{(x-y)^{18}}$

3. x, y의 값을 구하여라.

1) $\frac{3^2\cdot 3^5\cdot 3^{15}}{3^{20}\cdot 27}=\frac{1}{3^x}$ 2) $\frac{256\cdot 3^7}{2^{10}\cdot 81}=\frac{3^x}{2^y}$

3) $\frac{3^7\cdot 5^4\cdot 125}{3^{12}\cdot 81\cdot 625}=\frac{5^x}{3^y}$ 4) $\frac{3^x\cdot 27\cdot 7^2}{7^4\cdot 81\cdot 7^y}=\frac{3^6}{7^5}$

4. $x=0.25$, $y=\frac{1}{3}$일 때 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\frac{x^{16}\cdot y^5}{x^{15}\cdot y^{10}}$ 2) $\frac{4x^{n-1}\cdot y^{n-1}}{5y^{n+1}\cdot x^{n-1}}$

3. 제곱의 제곱

해보기 □안에 알맞는 수를 써넣어라.

1) $(a^2)^3=a^2 \cdot a^2 \cdot a^2=a^{\square}$

2) $(a^3)^4=a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3=a^{\square}$

3) $(a^2)^{10}=\underbrace{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot \ \cdots \ \cdot a^2}_{10\text{개}}=a^{\square}$

제곱을 다시 제곱할 때에는 지수끼리 곱한다.

례 $(a^2)^5=a^{2\times5}=a^{10}$, $(a^3)^4=a^{3\times4}=a^{12}$

문 제

1. □안에 알맞는 수를 써넣어라.

1) $(10^2)^3=10^{\square}$ 2) $[(-1)^3]^{10}=(-1)^{\square}=\square$

3) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^4\right]^7=\left(\frac{2}{3}\right)^{\square}$ 4) $27^5=3^{\square}$

2. 다음 제곱을 밑수가 더 작은 하나의 제곱으로 고쳐라.

1) $4^3=(2^2)^3=2^6$ 2) 25^{10} 3) 1000^5

4) $(2.25)^6$ 5) 81^7 6) 256^2

3. x를 구하여라.

1) $2^3 \cdot (2^2)^3=2^x$ 2) $(a^3)^2 \cdot a=a^{x-3}$

3) $(a^6)^n(a^m)^3=a^{3x}$ 4) $a^8(a^7)^8=a^{2x}$

4. x를 구하여라.

1) $2^x=4^4$ 2) $9^x=9^3$ 3) $(3^2)^3=x^2$

4) $x^3=27^2$ 5) $\left(\frac{1}{2}\right)^6=\left(\frac{1}{8}\right)^x$ 6) $9^x=(27^5)^2$

5. 다음 식의 값을 계산하여라.

1) $50 \cdot \{[(-1)^3]^2-[(-1)^5]^4\}$ 2) $6.5 \cdot \{[(-1)^6]+[(-1)^5]^3\}$

4. 적의 제곱

해보기 □에 알맞는 수를 써넣어라.

지수들을 비교해보면 무엇을 알수 있는가?

$$(ab)^3=(ab)(ab)(ab)=(aaa)(bbb)=a^{\square}b^{\square}$$

적을 제곱할 때에는 인수의 제곱들끼리 곱한다.

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$$

례 $(2\cdot a)^3=2^3\cdot a^3=8a^3$

문 제

1. 다음 식을 제곱들의 적으로 표시하여라.

   1) $(2\cdot 3)^3$ 2) $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)^6$ 3) $\frac{1}{72}$ 4) $[(-3)\cdot 6]^3$

2. 다음 식을 하나의 제곱으로 표시하여라.

   1) $2^3\cdot 5^3$ 2) $(-3)^4\cdot 7^4$

   3) $4^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5$ 4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^5$

3. □안에 알맞는 수나 식을 써넣어라.

   1) $a^4b^2=\square^2$ 2) $a^6b^9=(a^2b^3)^{\square}$

   3) $625x^{16}y^8=\square^4$ 4) $-27a^3b^6c^{12}=\square^3$

4. 다음 식을 정돈하여라.

   1) $(2x^3y)(-3xy)^2=2x^3y(-3)^2x^2y^2=18x^5y^3$ 2) $(2a^3b^2)^3(3a^2b^4)^2$

   3) $\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^2(-8x^3y^4)$ 4) $(3x^2y)(5xy^2)^3$ 5) $\left(\frac{3}{4}xy^2\right)^2\left(\frac{4}{3}x^3y\right)^2$

5. 다음 식의 값을 될수록 간편하게 구하여라.

   1) $25^2\cdot 4^2$ 2) $8^3\cdot 25^3$ 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{50}\cdot 1.5^{50}$

6. 다음 같기식에 맞는 x의 값을 구하여라.

   1) $2^6\cdot 3^6=6^{2x}$ 2) $(-5)^9\cdot 2^9=x^3$ 3) $(-1)^{12}\cdot 8^{27}=2^x$

5. 분수의 제곱

알아보기 $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\cdot2\cdot2}{3\cdot3\cdot3} = \frac{2^3}{3^3}$

의 형태로 변형하면 $\left(\frac{b}{a}\right)^4$ 는 어떻게 되는가?

분수를 제곱할 때는 분자와 분모를 각각 제곱한다.

례 $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4^2}{5^2}$, $\left(\frac{1}{10^2}\right)^3 = \frac{1^3}{(10^2)^3} = \frac{1}{10^6}$

지수법칙

$a^m a^n = a^{m+n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$

$(ab)^m = a^m b^m$ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n) \\ \frac{1}{a^{n-m}} & (m < n) \\ 1 \ (m = n) \end{cases}$$

문 제

1. 다음 제곱을 분자와 분모의 제곱으로 표시하여라.

1) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ 2) $\left(\frac{a}{b}\right)^5$ 3) $\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^4$

2. 다음 식의 값을 될수록 쉽게 구하여라.

1) $\frac{34^2}{17^2}$　　2) $\frac{150^3}{15^3}$　　3) $\frac{192^3}{9\cdot 64^2}$

3. 다음 식을 정돈하여라.

1) $\left(\frac{4ab^2}{3c^3}\right)^2$　　2) $\frac{(-3x^2yz^3)^4}{(3xy^2z^3)^4}$　　3) $\frac{(-4a^3b^2c)^6}{(2a^2b)(ab^3)^3}$

4. 다음 같기식에 맞는 x의 값을 구하여라.

1) $\frac{a^3}{a^x}=\frac{1}{a^3}$　　2) $\frac{a^{2x}\cdot a^3}{a^2}=a^7$　　3) $\frac{(a^xa^3)^2}{a^3}=a^9$

4) $\frac{(a^3)^9}{a^x\cdot a^3}=a$　　5) $\frac{a^2\cdot a^x}{a^{16}}=\frac{1}{a^8}$

련 습 문 제

1. 옳은 답을 선택하여라.

1) 아래의 계산에서 옳지 않은것은 (　)이다.

① $(-b^2)^3(-a^3)^2=-b^6(-a)^6=a^6b^6$

② $[(-a^3)^2(-b^2)^3]^3=-a^{16}b^{18}$

③ $(-ab^2)^3(-a^3b)^2=-a^9b^8$

④ $(-ab^2)^3(-a^2b)^3=a^9b^9$

2) 다음의 식에서 옳지 않은것은 (　)이다.

① $(a^4)^3=(a^3)^4$　　② $(a^4)^3=a^{4^3}$

③ $a^{4^3}=(a)^{4^3}$　　④ $a^4a^3=a^3a^4$

3) $(-x)^3(-x^2)^5x$의 계산결과는 (　)이다.

① x^{14}　　② $-x^{14}$　　③ $-x^{10}$　　④ x^{10}

2. 알맞는 수를 써넣어라.

1) $5^6=125^{\square}$　　2) $2^8=\square^4$

3) $2^{12}=\square^3$　　4) $3^{\square}=81^2$

3. 같기식에 맞는 x의 값을 구하여라.

1) $\frac{2^3\cdot 2^{81}}{2^{10}\cdot 2^{72}}=2^{x-3}$　　2) $\frac{2^4\cdot 2^{10}}{8\cdot 32}=2^{3x}$

3) $\dfrac{3^{x+1}\cdot 3^{x+2}}{(3^x)^2}=3^{2x+1}$

4) $\dfrac{5\cdot 5^{2x-1}\cdot 5^{2x+1}}{(5^4)^x\cdot 5^x}=\dfrac{1}{5^{2x}}$

4. 식의 값은 얼마인가?

1) $(-1)^{2n}$

2) $(-1)^{2n+1}$

5. 식의 값을 구하여라.

1) $\dfrac{(3^2)^3\cdot(3^3)^3}{3^5\cdot(3^2)^5}$

2) $\dfrac{a^2(ab)^{10}}{(a^4)^3(b^2)^3}$

3) $\dfrac{35^4}{7^3\cdot 125}$

4) $\dfrac{4^7\cdot 0.75^3}{9\cdot 18^2}$

6. 두 식의 값을 비교하여라.

1) $2^6\cdot 5^6$과 $3^6\cdot 4^6$

$$\frac{2^6\cdot 5^6}{3^6\cdot 4^6}=\left(\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\right)^6=\left(\frac{5}{6}\right)^6=\frac{5^6}{6^6}<1$$

그러므로 $2^6\cdot 5^6<3^6\cdot 4^6$

2) 36^5과 $2^{10}\cdot 3^{10}$

3) 32^{10}과 4^{28}

4) $(10^2)^3$과 $2^{10}\cdot 5^{10}$

5) 32^5과 $2^{10}\cdot 2^{15}$

6) $3^7\cdot 2^{22}$과 24^7

제2절. 여러마디식의 곱하기

1. 한마디식과 여러마디식의 곱하기

해보기 분배법칙을 써서 다음 식을 여러마디식으로 변형하여라.

1) $x^2(x+3y)=x^2x+3x^2y=x^3+3x^2y$

2) $x^2(2x^3+x^2-3x-4)$

3) $3a(a^2-5ab+2b^2)$

한마디식과 여러마디식을 곱할 때에는 한마디식에 여러마디식의 매 마디를 곱하고 정돈한다.

례 1 $3x^2(5x^2-3x+2)=3x^2\cdot 5x^2-3x^2\cdot 3x+3x^2\cdot 2=15x^4-9x^3+6x^2$

문 제

다음 식을 여러마디식으로 변형하여라. (1－2)

1. 1) $\frac{1}{6}ab(3a^2-6ab+18)$　　2) $\frac{7}{3}x^4(2x^3+\frac{4}{7}x-6)$

   3) $\left(\frac{x^4}{3}+\frac{2}{5}x^6\right)\cdot\frac{x^5}{7}\cdot\frac{3x}{7}$　　4) $\left(11-\frac{3x}{7}\right)\left(\frac{4x}{5}\right)^2$

2. 1) $-(2.25x^2-1.5y^2)\left(\frac{4}{9xy}\right)$　　2) $1\frac{2}{3}ab\left(\frac{3}{4}a^2-\frac{5}{6}b^2\right)(-b)$

   3) $-\frac{2a^2}{3}(18ab^2-0.3a^2b+1.5)$　　4) $-x(2.25x^2-6xy-1.5y^2)\frac{2}{9}y$

3. □안에 알맞는 수나 식을 써넣어라.

   1) $\square(3x-\square y)=\frac{3}{2}x-y$　　2) $\square(5x+\square)=15x^2+6x$

   3) $\square(x^2-\square x-\square)=2x^3+6x^2+4x$　　4) $\left(\frac{x}{2}-\square\right)\square=\frac{x^2}{10}-\frac{x}{3}$

례 2　$2(x+y-3)-3(x-y+4)=2x+2y-6-(3x-3y+12)$

$=2x+2y-6-3x+3y-12=-x+5y-18$

문 제

1. 다음 식을 여러마디식으로 고쳐라.

   1) $\frac{2}{3}x(3x-1)-\frac{1}{2}(4x+1)$　　2) $3x^4\left(2x^2-\frac{x}{6}\right)-5x^7$

   3) $-x^3+2x^4\left(5x^4-\frac{2x}{3}\right)$　　4) $8x-\frac{x}{2}(5-x)$

2. 다음 식을 계산하여라.

   1) $2(x^2-2x+1)-3(2x^2+x-2)$　　2) $3x(x-2)-5(2x^3-4x+1)$

   3) $a(a+b+c)-b(a-b+c)-c(a+b-c)$

   4) $x^2-x+3-x^2(x+2)+x(2x+1)$

3. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $3a(a-2b)-2b(b-3a)$ $\quad \left(a=\frac{1}{3},\ b=0.5\right)$

2) $(x+y+1)-y(y+x-1)$ $\quad \left(x=-0.5,\ y=\frac{1}{5}\right)$

3) $5a(a-4b)+3b-4a(a-5b)$ $\quad \left(a=\frac{1}{2},\ b=0.75\right)$

4. 다음 방정식을 간단히 하고 풀어라.

1) $3x(x+2)-x(3x-4)=20$

2) $1.5(2-x)-2(1.5-0.8x)=x-1.2$

3) $3x(x^3-x^2+5)-x^2(3x^2-3x-2)=2(x^2-x)+51$

4) $2x^2(x^2+5x+1)-5x(2x^2+x-2)-x^2(2x^2-3)=-2(x+4)$

5. 다음 안같기식을 간단히 하고 풀어라.

1) $\frac{2x-3}{3}-\frac{x-2}{2}>x$ $\qquad$ 2) $\frac{1}{3}|x-1|\leq\frac{5}{6}-\frac{x}{4}$

3) $2x(x-1)-3(2-3x)<2(x^2+x+2)$

4) $x^2(x-1)-x(x^2-x+5)\geq 3|x+8|$

2. 여러마디식들의 곱하기

알아보기 1. 다음것이 옳은가?

$(a+b)(c+d)$를 계산하기 위하여 먼저 $a+b=\mathrm{M}$으로 놓고 분배법칙을 써보자.

$$(a+b)(c+d)=\mathrm{M}(c+d)=\mathrm{M}c+\mathrm{M}d$$

다음으로 M에 $a+b$를 갈아넣고 분배법칙을 또 써보자.

$$(a+b)c+(a+b)d=ac+bc+ad+bd$$

따라서 $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$ $\qquad (*)$

2. $(a+b)(c+d)$를 계산하기 위해 $a+b$의 매 마디를 $c+d$의 모든 마디들에 각각 곱하여라. 결과식이 식 $(*)$과 같은가?

두 여러마디식들을 곱할 때에는 한 여러마디식의 매 마디에 다른 여러마디식의 모든 마디를 각각 곱하여 더하고 정돈한다.

$$(a+b)(c+d)=\underset{①}{ac}+\underset{②}{ad}+\underset{③}{bc}+\underset{④}{bd}$$

전개

문 제

1. 그림 7－1을 보면서

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

가 옳다는것을 설명하여라.

	a	b
c	ac	bc
d	ad	bd

그림 7－1

다음 식을 전개하여라. (2－5)

2. 1) $(x+2)(x+3)$　　2) $(x+1)(2x+3)$
   3) $(m+3)(4m+1)$　　4) $(3x+3)(2x+3)$
   5) $(5y-2)(5y+2)$　　6) $(2-3p^2)(5-2p^2)$

3. 1) $(x+2)(x^2-x+3)=x^3-x^2+3x+2x^2-2x+6=x^3+x^2+x+6$
   2) $(x-2)(x^2+3x-4)$　　3) $(x^2-4x+5)(x+5)$
   4) $(3x^2-x-2)(2x-1)$

4. 1) $(x+1)(x+2)(x+3)=[(x+1)(x+2)](x+3)$
   $=(x^2+2x+x+2)(x+3)$
   $=(x^2+3x+2)(x+3)$
   $=x^3+3x^2+3x^2+9x+2x+6$
   $=x^3+6x^2+11x+6$
   2) $(x-1)(x-2)(x-3)$　　3) $(1-x)(x+2)(3-x)$
   4) $(2q-1)(q+1)(2q-3)$

5. 1) $(2x^3-3x+4)(3x^2-4x+1)$　　2) $(x^2-8x+1)(3x^6-x^5-6x^2)$
   3) $(x^4-3x^3+2x)(3y^2-5y-7)$　　4) $(3x^3-3x^2-7)(3x^2-5x-1)$

6. 다음 식을 간단히 하여라.
   1) $(7x-4)(2x+3)-13x$　　2) $x^3-(x^2-3x)(x+3)$
   3) $(3a-2)(5-2a)+6a^2$　　4) $(y-2)(y^2+2y+4)$

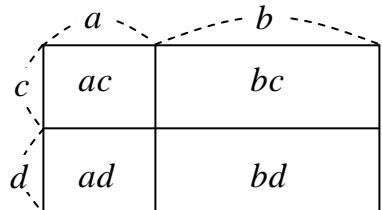
7. n에 그 어떤 자연수를 갈아넣어도 다음 식의 값은 12의 배수로 된다. 왜 그런가?

$$(n-1)(n+1)-(n-7)(n-5)$$

알아보기　두 여러마디식을 더한 합은 늘 여러마디식이였다. 두 여러마디식을 곱한 적도 늘 여러마디식이겠는가?

(여러마디식)＋(여러마디식)→(여러마디식)

(여러마디식)×(여러마디식)→(여러마디식)

알아보기　여러마디식이 $A=x^2+2x+1$, $B=x-1$, $C=x+1$일 때 다음 같기식이 성립하는가를 따져보아라.

$A+B=B+A$,　　$AB=BA$,　　$(A+B)+C=A+(B+C)$,

$(A \cdot B) \cdot C=A \cdot (B \cdot C)$,　　$A \cdot (B+C)=A \cdot B+A \cdot C$

옹근수, 분수에서와 같이 여러마디식에서도 더하기, 곱하기산법에 관하여 바꿈법칙, 묶음법칙, 더하기에 관한 곱하기분배법칙이 성립한다.

우의 성질은 여러마디식을 다루는데 널리 쓰인다.

례 다음 식을 전개하여라.

$$(x-3)(3x+2)(3x-2)=(x-3)(9x^2-6x+6x-4)$$
$$=(x-3)(9x^2-4)$$
$$=9x^3-4x-27x^2+12$$
$$=9x^3-27x^2-4x+12$$

문 제

다음 식을 간단히 하여라.

1) $(x^2-y^2-2x)+(3x^2+2xy-5)+(y^2-3x^2-2xy+5)$

2) $(x+2)(2x^2+3x-1)+(x^2-3x+1)(x+2)$

3) $4x^2(x+1)(3x^3-3x^2+3x-1)$　　4) $(x-1)(x^2+1)(x+1)(x^4+1)$

련 습 문 제

1. 다음 글에서 옳지 않은것은 어느것인가?

1) ① 여러마디식은 몇개의 한마디식들의 합이다.

② 여러마디식에 한마디식을 곱한 적은 여러마디식이다.

③ 여러마디식에 한마디식을 곱한 적의 차수는 여러마디식의 차수와 한마디식의 차수의 적과 같다.

④ 여러마디식에 한마디식을 곱한 적의 마디수는 곱하기전의 여러마디식의 마디수와 같다.

2) ① 여러마디식과 여러마디식을 곱한 적은 여러마디식이다.

② 여러마디식과 여러마디식의 적의 차수는 두 여러마디식의 차수의 적과 같다.

③ 여러마디식과 여러마디식의 적의 마디수는 두 여러마디식의 마디수의 적과 같다.

다음 계산을 하여라.(2－3)

2. 1) $(9x-5)(2x-3)-(7x-1)(x+3)$

2) $\left(\frac{x^2}{4}-\frac{5x}{7}\right)\left(3x-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{2x}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(5x^2-\frac{1}{3}\right)$

3) $(2x^2-x)(3x+1)-(5x-2)(2x^2-3)$

3. 1) $(3x^2+5x-8)(3x^2-6x+1)$ 2) $(3x^3+2xy-3y^2)(2x^2+xy-y^2)$

3) $(x^{3n}+2x^{2n}-5x^n+1)(x^{2n}+2x^n-5)-(2x^n+x^{n-1}+3)(x^n-5)$

4. 다음 식을 전개하여라.

1) $(x-1)(x^2+x+1)$ 2) $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$

3) $(x-1)(x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$

5. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $(x-4)(x-2)-(x-3)(x-2)$ $(x=1.75)$

2) $(a-5)(a-1)-(a+2)(a+3)$ $(a=2.6)$

3) $(2y-1)(3y+2)-(6y-1)(y+3)$ $(y=0.0625)$

6. 다음 안갈기식을 풀어라.

1) $(1-6x)(x+2)-(1-3x)(2x+3)>0$

2) $(x-1)(x^2+x-1)-x(x^2-1)\geq 0$

3) $x(x^2-3)-(x+1)(x^2-x+1)<0$

7. 련이어있는 세 자연수의 적의 2제곱을 표시하는 식을 쓰고 전개하여라.

8. 련이어있는 네 자연수가 있다. 이가운데서 작은 두 수의 적이 나머지 두 수의 적보다 26만큼 작다. 이 자연수들을 구하여라.

제3절. 인수분해

어떤 여러마디식은 수에서와 같이 몇개의 인수들의 적으로 고칠수 있다.

여러마디식을 몇개의 인수들의 적으로 고치는것을 **인수분해**한다고 말한다.

1. 매 마디의 공통인수를 찾아서 인수분해하기

해보기 1. 다음 여러마디식에서 매 마디들의 공통인수를 지적하여라.

1) $3x^2+3y^2$ 2) $2x^2y-6xy^2+3xy$

2. □안에 알맞는 식을 써보아라.

그림 7−2

례 여러마디식 $6x+3xy$를 인수분해하여라.

(풀이) $6x+3xy=3x\cdot 2+3xy=3x(2+y)$

인수분해

문 제

1. 다음 여러마디식에서 공통인수를 찾아서 인수분해하여라.

1) $5x+10x^2$ 2) $8x^5-12x^4$ 3) $12x^3-16x$

4) $42x^3-35x^2y$ 5) $\frac{6}{5}x^2-\frac{4}{5}x$

2. 다음 여러마디식을 인수분해하여라.

1) $100a-10b+10$ 2) $2y^3-6y^2+12y$

3) $20x^4+25x^2y^2-15^2y$

3. 다음 식을 인수분해한 다음에 그 값을 구하여라.

1) $35x+35y$ $(x=13.7,\ y=6.3)$

2) $168a-42a^2b$ $(a=2.34,\ b=1.84)$

3) $xy-2y^2$ $(x=12.48,\ y=1.24)$

4) a^2y-a^3 $(a=3.5,\ y=6.5)$

알아보기 다음 식들에서 여러마디식으로 된 공통인수를 찾아보아라.

1) $x(x+2)+3(x+2)$　　　2) $3x^2(x-3)-4(x-3)$

3) $x^2(3x+1)-y(3x+1)-2xy(3x+1)$

공통인수가 여러마디식일 때에도 앞에서와 같은 방법으로 인수분해한다.

문 제

1. 다음 식에서 공통인수를 찾아서 인수분해하여라.

1) $2(x-y)+3x(x-y)$　　　2) $a^2(1-3x)+a(1-3x)$

3) $(2x-7)(x-3)+(2x-7)(4x+5)$

4) $(m+8)(2x-1)+(4m-1)(2x-1)$

2. 다음 식을 인수분해하여라.

1) $(4x+7)^2+(3x+2)(4x+7)$　　　2) $(x+4)^2(3x+2)+5(x+4)^3$

3) $(1-x)(4z+11)^5-2(4z+11)^2$　　　4) $15(x-4)^3-12(3-2x)(4-x)^2$

2. 마디를 묶어서 인수분해하기

알아보기 다음것이 옳은가?

여러마디식 $5a^2+7x-5ax-7a$에는 전체 마디의 공통인수는 없다. 그러나 마디들을 몇개씩 잘 묶으면 공통인수들이 생겨 인수분해할수 있다.

$(5a^2-5ax)+(7x-7a)=5a(a-x)-7(a-x)=(a-x)(5a-7)$

마디를 묶어서 인수분해하기

$3ax-by-3ay+bx=(3ax-3ay)+(bx-by)$

$=3a(x-y)+b(x-y)=(x-y)(3a+b)$

문 제

1. 마디를 묶어서 다음 식을 인수분해하여라.

1) $ab-ac-3(c-b)$　　2) $4(y-z)+6z-6y$

3) $ax-4ay-4by+bx$　　4) x^2+ax-a^2y-axy

2. 다음 식을 인수분해하여라.

1) $6ax+by+2ay+3bx$　　2) $ab-12-4a+3b$

3) $6ab-bc-3b^2+2ac$　　4) $2x^3+9+3x^2+6x$

3. 다음 식을 인수분해하여라.

1) $ax^2+ay^2-bx^2-by^2+b-a$

$=(ax^2-bx^2)+(ay^2-by^2)-(a-b)$

$=x^2(a-b)+y^2(a-b)-(a-b)$

$=(a-b)(x^2+y^2-1)$

2) $a^2+8b-3ac+2ab-12c+4a$　　3) $xy^2-by^2-ax+ab+y^2-a$

3. 마디를 갈라서 인수분해하기

알아보기 여러마디식 $3a^2-5ab+2b^2$에 세개 마디의 공통인수가 있는가? 그리고 마디 $-5ab$를 어떻게 갈라야 공통인수가 생겨 인수분해를 할수 있겠는가?

례 1 $3a^2-4ab+b^2=3a^2-3ab-ab+b^2$

$=(3a^2-3ab)-(ab-b^2)$

$=3a(a-b)-b(a-b)$

$=(a-b)(3a-b)$

마디를 갈라서 인수분해하기

$2a^2+5ab+3b^2=2a^2+2ab+3ab+3b^2$

$=(2a^2+2ab)+(3ab+3b^2)$

$=2a(a+b)+3b(a+b)$

$=(a+b)(2a+3b)$

문 제

1. 다음 식을 마디를 갈라서 인수분해하여라.

1) x^2+3x+2 2) $x^2+3xy+2y^2$

3) $x^2+7x+10$ 4) x^2-5x+6

5) $x^2-10xy+16y^2$ 6) $a^2-10ab+21b^2$

2. 다음 식을 인수분해하여라.

1) x^2-x-2 2) $y^2-12y+27$ 3) $z^2+4z-32$

4) $x^2-3x-10$ 5) $t^2-4t-12$

3. 1차마디를 어떻게 갈라놓으면 되겠는가를 생각하고 □안에 알맞는 식을 써넣어라.

1) $2x^2-5x-3=(2x+\square)(x-\square)$ 2) $3a^2+a-2=(3a-\square)(a+\square)$

3) $5x^2+13x-6=(\square-2)(\square+3)$ 4) $6x^2-x-1=(3x+\square)(2x-\square)$

인수분해하려는 여러마디식의 일부분을 하나의 글자로 바꾸어놓으면 인수분해가 쉽게 되는 경우가 있다.

례 2 $(x^2+x+3)(x^2+x-1)-5$를 인수분해하여라.

(풀이) $x^2+x+3=y$로 놓으면

$$x^2+x-1=y-4$$

따라서

$$\begin{aligned}(x^2+x+3)(x^2+x-1)-5&=y(y-4)-5\\&=y^2-4y-5\\&=y^2-5y+y-5\\&=(y^2-5y)+(y-5)\\&=y(y-5)+(y-5)\\&=(y-5)(y+1)\\&=(x^2+x+3-5)(x^2+x+3+1)\\&=(x^2+x-2)(x^2+x+4)\\&=(x^2-x+2x-2)(x^2+x+4)\\&=[(x^2-x)+(2x-2)](x^2+x+4)\\&=[x(x-1)+2(x-1)](x^2+x+4)\\&=(x-1)(x+2)(x^2+x+4)\end{aligned}$$

웃례에서와 같이 여러마디식의 인수분해는 보통 더 가를수 없는 가장 낮은 차수의 인수들을 얻을 때까지 한다.

문 제

다음 식을 인수분해하여라.

1) $(x^2-15x+54)(x^2+11x+28)+350$

(괄호안의것을 각각 인수분해하고 $x^2-2x-24=y$로 놓아라.)

2) $(2x^2-3x-1)^2-22x^2+33x-1$

($-22x^2+33x-1=-11(2x^2-3x-1)-12$로 고치고 생각하여라.)

3) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)+24$

련 습 문 제

1. 1) 3개의 련이어있는 짝수들가운데 가운데수가 k이면 그것들의 적은 아래것들가운데서 어느것인가?

① $8k^2-8k$ ② k^3-4k ③ $8k^3-2k$ ④ $4k^3-k$

2) 여러마디식 $9x^4y-4x^2y^3$과 $x^2(2x+y)^2-(x^2-3xy)^2$의 공통인수(최고차수)는 아래것들가운데서 어느것인가?

① x ② x^2 ③ $x(3x-2y)$ ④ $x^2(3x-2y)$

다음 식을 인수분해하여라.(2−4)

2. 1) $ax-ay+bx-by$ 2) $x+xy+y+x^2$

3) $ab-6+3a-2b$ 4) $ax-10y-2ay+5x$

5) $ax^2+cx^2-ay+ay^2-cy+cy^2$ 6) $ac^2-ad-bc^2+cd+bd-c^3$

3. 1) $(2x+3)(3x-1)+(x-1)(1-3x)$

2) $a(x-y)-b(y-x)+3y-3x$

3) $a^2b+24-8a-3ab$ 4) $8ab+bc-4b^2-2ac$

4. 1) x^3-2x^2+3x-6 2) $x^5+5x^3-2x^2-10$

3) $x^5+x^3-2x^2-2$ 4) $6x^5-2x^3-9x^2+3$

5. 다음 식들을 마디를 갈라서 인수분해하여라.

1) $x^2-10x+25$ 2) $a^2+10ab+9b^2$

3) $y^2+10y-11$ 4) $a^2-7ab-8b^2$

6. □, △안에 알맞는 식을 써넣어라.

1) $2x^2+x-1=(2x-\square)(x+\triangle)$

2) $3x^2-7x-6=(3x-\square)(x-\triangle)$

3) $2x^2-xy-3y^2=(2x+\square)(x-\triangle)$

4) $3a^2+5ab-2b^2=(\square-b)(\triangle+2b)$

5) $6x^2-x-1=(3x-\square)(2x+\triangle)$

다음 식을 인수분해하여라.(7－8)

7. 1) $2x^2+3x-5$ 2) $3x^2+11x+6$

3) $5x^2+8x-4$ 4) $2x^2+9xy-5y^2$

5) $6a^2-5ab-6b^2$ 6) $2m^2-5mn-3n^2$

7) x^3+5x^2+3x-9 8) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

8. 1) $(2x^2+3x-2)(2x^2+3x-3)-6$

2) $(7x^2+3x-1)^2+35x^2+15x-11$

3) $(6x^3-4x+2)^2-9x^3+6x-10$

제4절. 곱하기공식과 인수분해공식

1. 합과 차의 곱하기공식과 인수분해

1. 다음 식을 전개하면 어떤 식이 나오는가?

$$(a+b)(a-b)=?$$

2. 아래의 두 그림에 있는 빗선을 친 부분의 면적을 각각 식으로 표시하여라. 그다음 크기를 비교하여라. 무엇을 알수 있는가?

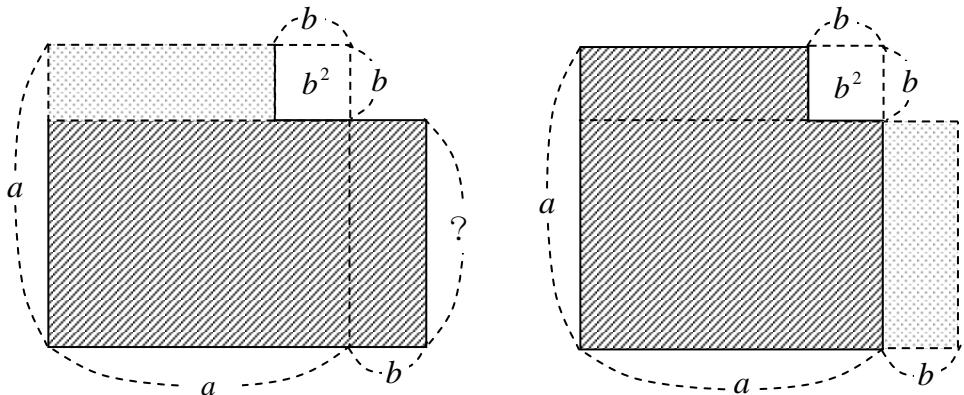



그림 7－3

합과 차의 곱하기공식

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$(2x+3y)(2x-3y)=(2x)^2-(3y)^2=4x^2-9y^2$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

문 제

1. 합과 차의 곱하기공식을 써서 다음 식을 전개하여라.

   1) $(a+4)(a-4)$　　2) $(3x-2)(3x+2)$

   3) $(3a+2b)(3a-2b)$　　4) $(7a^2-3b)(7a^2+3b)$

2. 다음 식을 전개하여라.

   1) $(a+2)(a-2)(a^2+4)$　　2) $(a^4+100)(a^2+10)(a^2-10)$

   3) $(x-3y)(x+3y)(x^2+9y^2)$

3. 다음 곱하기계산을 편리한 방법으로 하여라.

   1) $51 \cdot 49=(50+1)(50-1)=50^2-1^2=2499$

   2) $102 \cdot 98$　　3) $72 \cdot 68$

   4) $93 \cdot 87$　　5) $1.02 \cdot 0.98$

합과 차의 곱하기공식의 두 변을 서로 바꾸면 공식

$$a^2-b^2 \underset{\text{인수분해}}{\overset{\text{곱하기}}{\rightleftarrows}} (a+b)(a-b)$$

를 얻는다.

례 1) $x^2-4=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$

2) $(x+2)^2-9=(x+2)^2-3^2=(x+2+3)(x+2-3)=(x+5)(x-1)$

3) $2x^3+x^2-32x-16=(2x^3+x^2)-(32x+16)$

$=x^2(2x+1)-16(2x+1)$

$=(2x+1)(x^2-16)$

$=(2x+1)(x+4)(x-4)$

문 제

1. 다음 식을 인수분해하여라.

1) $1-x^2$　　2) $36-a^2$　　3) $25x^2-49$

4) $0.09-y^2$　　5) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}$　　6) $\frac{1}{4}-\frac{(x-1)^2}{25}$

2. 다음 식의 값을 간단한 방법으로 구하여라.

1) 75^2-74^2　　2) $\left(3\frac{4}{9}\right)^2-\left(2\frac{5}{9}\right)^2$　　3) $\frac{32^2-28^2}{37^2-23^2}$　　4) $\frac{15^2-85^2}{103^2-97^2}$

다음 식을 인수분해하여라.(3−4)

3. 1) $25x^2-4(3x-1)^2$　　2) $\frac{16x^2}{49}-\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{7}\right)^2$

3) $\left(3x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{64x^2}{81}$　　4) $(3x-2)^2-9(7x-3)^2$

4. 1) x^3-x　　2) $xy-4xy^3$　　3) x^3+x^2-9x-9

4) $(x+1)(2x-1)+x^2-1$　　5) $25x^2-4-(4x-7)(5x+2)$

2. 합, 차의 2제곱공식과 인수분해

1. 다음 식을 전개하면 어떤 식이 나오는가?

1) $(a+b)^2$　　2) $(a-b)^2$

2. 우에서 얻은 전개식을 그림을 보면서 설명하여라.

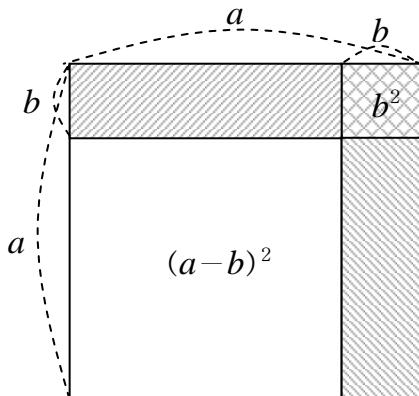
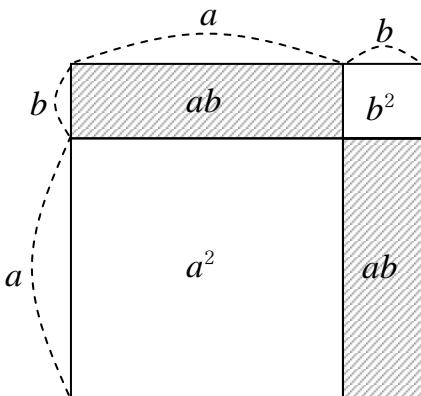



그림 7−4

합, 차의 2제곱공식

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

문 제

1. 다음 식을 전개하여라.

1) $(a+1)^2$　　2) $(x-3)^2$　　3) $(3x-2)^2$

4) $(5x+4y)^2$　　5) $\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{4}\right)^2$　　6) $\left(5x-\frac{1}{6}\right)^2$

7) $\left(\frac{2x}{3}-\frac{3y}{5}\right)^2$　　8) $\left(7x+\frac{2y}{3}\right)^2$

2. 다음 식을 전개하여라.

1) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$　　2) $(a^2-3)^2$　　3) $(x^2+5x)^2$　　4) $\left(\frac{1}{a}-a\right)^2$

3. □안에 알맞는 식을 써넣어라.

1) $(3x+\square)^2=9x^2+12x+\square$　　2) $\left(\square\, x-\frac{3}{2}\right)^2=\square\, x^2-9x+\frac{9}{4}$

3) $\left(\frac{2x^2}{5}-\square\right)^2=\frac{4x^2}{25}-\frac{3x^2}{5}+\square$　　4) $(\square x-3)^2=\square x^2-2x+9$

합, 차의 2제곱공식은 수값계산에서도 자주 쓰인다.

례 1　1) $101^2=(100+1)^2=100^2+200+1=10201$

2) $35^2=(30+5)^2=30^2+2\cdot30\cdot5+5^2=900+300+25=1225$

일반적으로

$$(10a+5)^2=(10a)^2+2\cdot10\cdot a\cdot5+5^2=100a^2+100a+25=100a(a+1)+25$$

례 2 $85^2=(10\cdot8+5)^2=8\cdot(8+1)\cdot100+25=7200+25=7225$

(8과 8보다 1 큰 수인 9를 곱하여 72를 얻은 다음 련이어 25를 쓴다.)

$8\times(8+1)$

$85^2=\overline{72}\underline{25}$

5×5

문 제

다음것을 암산하여라.

15^2, 25^2, 35^2, 45^2, 55^2, 65^2, 75^2, 85^2, 95^2, 105^2, 605^2, 995^2

알아보기 $(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2$, $(a-b-c)^2=[a+(-b)+(-c)]^2$ 을 전개하면 어떤 식이 나오는가?

문 제

다음 식을 전개하여라.

1) $(a+b-c)^2$ 2) $(2x-y+3z)^2$ 3) $(a+b+c+d)^2$

합, 차의 2제곱공식의 두 변을 서로 바꾸면 2차3마디식의 인수분해공식을 얻는다.

2차3마디식의 인수분해(1)

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

례 3 1) $4a^2-12ab+9b^2=(2a)^2-2\cdot 2a\cdot 3b+(3b)^2=(2a-3b)^2$

2) $\frac{1}{16}-\frac{x}{2}+x^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2-2\cdot\frac{1}{4}x+x^2=\left(\frac{1}{4}-x\right)^2$

문 제

다음 식을 인수분해하여라.(1−2)

1. 1) $p^4-2p^2q^2+q^4$ 2) a^2+2a+1 3) a^4-2a^2+1
   4) $x^2+8x+16$ 5) $36x^2-12xy+y^2$

2. 1) $a^2-ab+\frac{b^2}{4}$ 2) $x^2+x+\frac{1}{4}$ 3) $x^2+\frac{4}{7}x+\frac{4}{49}$

3. □안에 알맞는 식을 써넣어라.

   1) $\frac{36}{25}x^2-\frac{36}{25}x-\square=\left(\frac{6}{5}x-\square\right)^2$ 2) $\square+\frac{35}{4}a+\frac{25}{4}=\left(\square+\frac{5}{2}\right)^2$

   3) $\square+\square+\frac{49}{4}=\left(\frac{4}{9}x+\square\right)^2$ 4) $x^2-\square+\square=\left(\square-\frac{7}{5}\right)^2$

4. 다음의 인수분해에서 틀린것을 찾아라.

   1) $1-9x^2=(1+9x)(1-9x)$ 2) $a^2-a+\frac{1}{4}=(a-1)^2$

   3) $-mx+my=-m(x+y)$ 4) $ax+by-bx-ay=(a-b)(x-y)$

5. 다음 식의 x에 어떤 값을 넣어도 그 식들의 값은 부수로 되지 않는다. 왜 그런가?

   1) $x^2-12x+36$ 2) $x^2+\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}$

   3) $49+4x^2+28x$ 4) $4x^2-\frac{12}{5}x+\frac{9}{25}$

3. 두 1차식의 곱하기공식과 인수분해

알아보기 식 $(ax+b)(cx+d)$를 전개하여라.
전개식에서 $a=c=1$이면 어떻게 되는가?

두 1차식의 곱하기공식

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

례 1 1) $(x+2)(x+5)=x^2+(2+5)x+2\cdot 5=x^2+7x+10$

2) $(2x+3)(4x-1)=2\cdot 4x^2+[2\cdot(-1)+3\cdot 4]x+3\cdot(-1)$

$=8x^2+10x-3$

문 제

1. □안에 알맞는 수를 써넣어라.

1) $(x+3)(x-2)=x^2+□x+□$　　2) $(2x+3)(3x+1)=□x^2+□x+□$

3) $(5x-2)(2x+1)=□x^2+□x+□$　　4) $(2x-4)(2x-6)=□x^2+□x+□$

2. 다음 식을 전개하여라.

1) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$　　2) $\left(\frac{1}{5}-p\right)\left(p-\frac{1}{6}\right)$

3) $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(2x+\frac{1}{2}\right)$　　4) $\left(-\frac{1}{2}x+1\right)\left(\frac{2}{5}x-2\right)$

5) $\left(\frac{2}{3}z-1.5\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}z\right)$　　6) $(x^2+3)(x^2+1)$

7) $(y^3-6)(y^3-3)$　　8) $(2y^4-1)(5y^4+2)$

3. 다음 식을 전개하여라.

1) $[2(x-2)+5][3(x-2)+6]$　　2) $[(y-3)^2-1][2(y-1)^2+1]$

3) $\left[\frac{1}{2}(m-n)-\frac{2}{5}\right]\left[\frac{1}{5}(m-n)+\frac{2}{5}\right]$　　4) $\left[(p+q)^2-\frac{3}{4}\right]\left[\frac{1}{4}(p+q)^2-4\right]$

두 1차식의 곱하기공식에서 두 변을 바꾸면 2차3마디식의 인수분해공식을 얻는다.

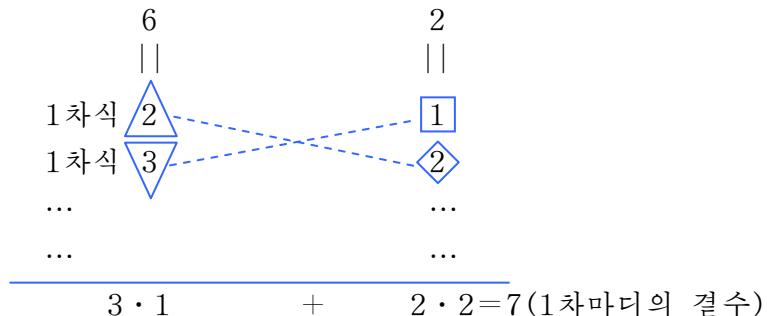
$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$
$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

례 2 $6x^2+7x+2$를 인수분해하여라.

(풀이) 이 2차3마디식을 인수분해하려면 갈기식

$$6x^2+7x+2=(\underline{\triangle x+\square})(\underline{\triangledown x+\diamond})$$
(1)　　(2)

의 빈 칸에 알맞는 수를 구해야 한다.

이때 다음과 같은 도식을 리용할수 있다.

따라서

$$6x^2+7x+2=(2x+1)(3x+2)$$

문 제

1. □안에 알맞는 수를 써넣어라.

1) $x^2+5x+6=(x+\square)(x+\square)$　　2) $x^2-x-6=(x+\square)(x+\square)$

3) $x^2-7x+12=(x+\square)(x+\square)$　　4) $3x^2-13x-10=(\square x+\square)(\square x+\square)$

다음 식을 인수분해하여라. (2−5)

2. 1) $x^2+10x+21$　　2) x^2-x-20

3) $x^2+15x+56$　　4) $3x^2+11x+10$

5) $6x^2-19x+10$

3. 1) $x^2-\frac{1}{15}x-\frac{2}{15}$　　2) $x^2-x+\frac{3}{16}$

3) $x^2+3\frac{1}{8}x+\frac{3}{8}$　　4) $\frac{2}{15}x^2+\frac{4}{15}x-2$

5) $\frac{1}{3}x^2-\frac{17}{36}x+\frac{1}{6}$

4. 1) $(2x-y)^2-3(2x-y)+2$

$2x-y=t$로 놓으면

$(2x-y)^2-3(2x-y)+2=t^2-3t+2$

$=(t-2)(t-1)$

$=(2x-y-2)(2x-y-1)$

2) $(a+3b)^2-(a+3b)-20$

3) $2(x+y)^2-3(x+y)+1$

5. 1) $a^2+4b^2+4ab+8a+16b-9$

$=(a^2+4ab+4b^2)+(8a+16b)-9$

$=(a+2b)^2+8(a+2b)-9$

$=(a+2b+9)(a+2b-1)$

2) $x^2+2xy+y^2-3x-3y-40$

3) $x^2-3xy+2y^2-5x+8y+6=x^2-(3y+5)x+(2y+2)(y+3)$

$=[x-(2y+2)][x-(y+3)]$

$=(x-2y-2)(x-y-3)$

4) $x^2-y^2-3z^2-2xz-4yz$

4. 3제곱의 합, 차의 공식과 인수분해

해보기 다음 식을 전개하면 어떤 식이 나오는가?

1) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

곱하기공식

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

우의 곱하기공식을 두 변을 바꾸면 두 3제곱의 합, 차의 인수분해공식을 얻는다.

3제곱의 합, 차의 인수분해공식

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

례 1 x^3+3^3을 인수분해하여라.

(풀이) $x^3+3^3=(x+3)(x^2-3x+9)$

례 2 $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)=$

$=(3x-2y)[(3x)^2+3x\cdot 2y+(2y)^2]$

$=(3x)^3-(2y)^3=27x^3-8y^3$

문 제

다음 식을 전개하여라.(1−2)

1. 1) $(a+6)(a^2-6a+36)$　　2) $(k-5)(k^2+5k+25)$
   3) $(x+1)(x^2-x+1)$　　4) $(x-1)(x^2+x+1)$
2. 1) $(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$　　2) $(2a+10)(4a^2-20a+100)$
   3) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{9}\right)$

다음 식을 인수분해하여라.(3−4)

3. 1) x^3-27　　2) $8x^3+1000$　　3) $0.008x^3-\frac{1}{125}$
   4) x^6-1　　5) $m^{12}-n^{12}$　　6) a^6+b^6
4. 1) $a^3-(b-c)^3$　　2) $(2p+q)^3+8r^3$
   3) $(2x-y)^3+(2x+3y+1)^3$　　4) $2x^3-54y^3-3x+9y$

5. 합, 차의 3제곱공식과 인수분해

알아보기 다음 식을 전개하면 어떤 식이 나오는가?

1) $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)$　　2) $(a-b)^3$

합의 3제곱공식이 성립한다는것을 그림 7−5의 체적들을 비교해보아도 알수 있다.

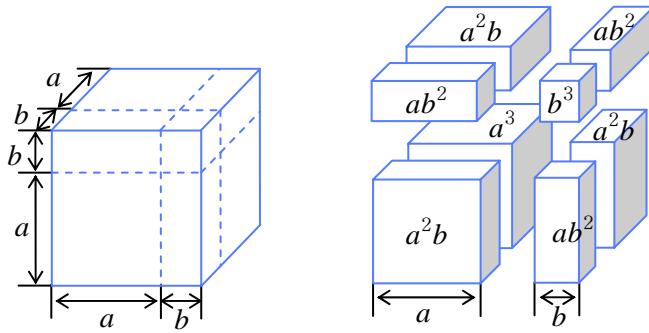



그림 7—5

례 1) $(2x+3y)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot(3y)+3\cdot(2x)(3y)^2+(3y)^3$
$=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

2) $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^3=\left(\frac{x}{2}\right)^3-3\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot\frac{y}{3}+3\cdot\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{y}{3}\right)^2-\left(\frac{y}{3}\right)^3$
$=\frac{x^2}{8}-\frac{x^2y}{4}+\frac{xy^2}{6}-\frac{y^3}{27}$

3) $(a-2b)^3-(a+2b)^3$
$=a^3-3a^2\cdot2b+3\cdot a\cdot4b^2-8b^3-a^3-3\cdot a^2\cdot2b-3a\cdot4b^2-8b^3$
$=-12a^2b-16b^3$

인수분해공식

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$
$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$
$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

문 제

1. 다음 식을 전개하여라.

1) $(m+n)^3$ 2) $(a-2)^3$ 3) $(5x-3y)^3$ 4) $\left(\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}\right)^3$

2. 다음 식을 여러마디식으로 고쳐라.

1) $(a+2b)^3-(a-2b)^3$　　　2) $(3y+2z)^3-(-y+z)^3$

3) $(2x-5)^3+(3x-2)^3$

3. 다음 식을 인수분해하여라.

1) $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y)^3-3x^2y-3xy^2+z^3-3xyz$

$=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)$

$=(x+y+z)[(x+y)^2-(x+y)z+z^2]-3xy(x+y+z)$

$=(x+y+z)(x^2+2xy+y^2-xz-yz+z^2-3xy)$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$

2) $a^3-b^3+3ab+1$　　　3) $m^3+n^3+3mn-1$

4. 아래의 인수분해를 보고 다음 식들을 인수분해하여라.

$x^2+2xy-3y^2+3x+y+2$를 다음과 같이 인수분해할수 있다.

$x^2+2xy-3y^2+3x+y+2=(x+3y+2)(x-y+1)$

1) $4x^2-14xy+6y^2-7x+y-2$　　　2) $x^2-y^2+5x+3y+4$

3) $xy+y^2+x-y-2$　　　4) $6x^2-7xy-3y^2-xz+7yz-2z^2$

5) $x^2-8xy+15y^2+2x-4y-3$　　　6) $6x^2-13xy+6y^2+22x-23y+20$

7) $x^2-xy+2x+y-3$　　　8) $3x^2-11xy+6y^2-xz-4yz-2z^2$

련 습 문 제

1. 다음 갈기식에서 옳은것을 가려내여라.

1) $(m+n)^2=m^2+n^2$　　　2) $(2a-b)^2=4a^2+4ab+b^2$

3) $9(a+2b)^2-16x^4=(3a+6b+4x^2)(3a+6b-4x^2)$

4) $(a-b)^3-(b-a)=(b-a)[(b-a)^2-1]=(b-a)(b-a+1)(b-a-1)$

5) $(x+y-z)^2-(x-y+z)^2=4x(y-z)$

6) $mp^5-m^5p=mp(p^4-m^4)=mp(p^2+m^2)(p+m)(p-m)$

2. 다음 식을 전개하여라.

1) $(x-2y+3z)^2$　　2) $(x^2+x+1)(x^2+x-1)$

3) $(x^3+x^2-x+3)(x^3+x^2-x-3)$　　4) $(3x^3-y^2+5z-2)(3x^3-y^2-5z+2)$

3. 다음 같기식은 a가 어떤 값을 잡을 때 성립하는가?

1) $(a+5)^2=a^2+5^2$　　2) $(a-3)^2=a^2-3^2$

다음 식을 인수분해하여라.(4−13)

4. 1) $x^2+\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}$　　2) $3k^2+1\frac{1}{2}k+\frac{1}{6}$

3) $\left(3x+\frac{1}{3}y\right)^2+3\left(3x+\frac{1}{3}y\right)-28$　　4) $7(2m+3n)^2-13(2m+3n)-2$

5) $x^2+(y^2+y+1)x+y^3+y^2$　　6) $3ab^2+(3a^5-2)b-2a^4$

5. 1) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$　　2) $4a^2-4ab+b^2-12a+6b+5$

3) $6x^2+36xy+54y^2-x-3y-1$　　4) $a^3b+3ab^2-2a^2-6b$

6. 1) $(2a+3b)^3-(3b-2a)^3$　　2) $(m-x)^3+(n-x)^3-(m+n-2x)^3$

3) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

7. 1) x^4+4　　2) $x^4-11x^2y^2+y^4$　　3) x^3+3x^2+3x-7

8. 1) $x^4+x^2-2ax+1-a^2$　　2) $(x+1)^4+(x^2-1)^2+(x-1)^4$

3) $x^9+x^6+x^3-3$　　4) $a^{5n}+a^{4n}+1$(n: 자연수)

9. 1) $(x^2+5x+6)(x^2+7x+6)-3x^2$　　2) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-1680$

3) $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)-6$　　4) $(x+1)^4+(x+3)^4-272$

5) $(x^2-x)^2+(x^2+3x+2)^2-4(x^2+x+1)^2$

10. 1) $x^2-8ax-40ab-25b^2$　　2) $x^4+y^4+z^4-2(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)$

3) $(y+1)^2-2x^2(y^2+1)+x^4(y-1)^2$

11. 1) $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$　　2) $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$

12. 1) $x^2+3xy+2y^2+5x+7y+6$(x에 대한 2차3마디식으로 볼것)

2) $x^3-3x^2+(a+2)x-2a$　　3) $x^4-2ax^2+x^2+a^2-a$

4) $x^3+yx^2-(7+2y)x+y^2+5y+6$

13. 1) $x^4+7x^3+14x^2+7x+1$(가운데마디로부터 량쪽으로 같은번째의 마디의 결수는 같다는데로부터 x^2을 괄호밖으로 꺼내고 생각해보아라.)

2) $6x^4+7x^3-36x^2-7x+6$　　3) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6$

14. 련이어있는 세 자연수의 적은 6의 배수라는것을 알고 $(n^2-n)(2n-1)$이 6의 배수라는것을 밝혀라.(n은 자연수)

15. n이 자연수일 때 n^4+64는 합성수라는것을 밝혀라.

16. n^4+324는 합성수임을 밝혀라.(n은 자연수)

탐구

1. 다음의 같기식을 관찰하고 그에 맞는 규칙을 이끌어내여라.

$$9-1=8$$
$$16-4=12$$
$$25-9=16$$
$$36-16=20$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots$$

$n(n\geq 1)$이 자연수일 때 n에 관한 같기식으로 이 규칙을 표시하여라.

2. 다음의 같기식을 보고 그에 맞는 일반적인 규칙을 생각해보아라.

$$1\times2\times3\times4+1=5^2$$
$$2\times3\times4\times5+1=11^2$$
$$3\times4\times5\times6+1=19^2$$
$$4\times5\times6\times7+1=29^2$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots$$

1) 일반적인 규칙을 자연수 n에 관한 같기식으로 이끌어내여라.

2) $2000\times2001\times2002\times2003+1$은 어떤 수의 2제곱으로 되겠는가?

복 습 문 제

1. 다음 수들을 작아지는 차례로 써라.

$$2^3,\ (2^2)^3,\ 2^{2+3},\ 2^{2^3},\ 3^{3^2}$$

2. $A\cap B$, $A\cup B$를 구하여라.

1) $A=\{n\,|\,3^n<100,\ n\in N\}$, $B=\{n\,|\,5^n<400,\ n\in N\}$

2) $A=\{n\,|\,15<2^n<70,\ n\in N\}$, $B=\{n\,|\,25<3^n<250,\ n\in N\}$

3. □안에 알맞는 기호를 써넣어라.

1) $3^8\square27^3$ 2) $8^9\square2^{28}$ 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\square\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ 4) $2^{20}\cdot5^{15}\square(10^5)^3$

4. 2^{60}을 밑수가 4, 8, 16, 32인 제곱으로 각각 표시하여라.

5. n이 짝수이면 그 값은 1이고 n이 홀수이면 그 값이 0이 되는 n을 변수로 가지는 식을 만들어라.

6. 다음 식을 여러마디식으로 고쳐라.

1) $(3x-1)(2x+5)-x(5x+3)$　2) $(2x+1)(3x^2-2x-1)-(2x-3)(2x+3)$

3) $(2x^2-3x+2)(3x^2-2x-5)$　4) $(x^2-2x-4)(3x^4-5x^3+2x^2-3x+3)$

7. 다음 식을 전개하여라.

1) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$　2) $(3x^2-x+2)(3x^2-x-2)$

3) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$　4) $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

8. $b+c=10$일 때 같기식 $(10a+b)(10a+c)=a(a+1)\cdot 100+bc$가 성립하는가를 따져보아라. 그에 기초하여 열의 자리수자가 같고 하나의 자리수자의 합이 10인 두자리수의 곱하기(례: 47・43, 68・62)를 암산으로 쉽게 하는 규칙을 말하여라.

9. 수 1 000 027의 씨인수를 모두 구하여라.

10. 1부터 100까지의 자연수들을 다 곱한 수는 마지막으로부터 몇개의 련이은 0이 있는가?

다음 식을 인수분해하여라.(11−16)

11. 1) $6x^2-x-12$　2) $10x^2+21x-10$　3) $6x^2-13x-15$

12. 1) $(x+y)^2+3(x+y)-10$　2) $(2a-3b)^2+2(2a-3b)-48$

3) $2(x-y)^2-3(x-y)+1$　4) $x^2-y^2-2x+4y-3$

13. 1) x^4+x^2+1　2) $(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)-16$

3) $x(x+1)(x+2)(x+3)-120$　4) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-3$

14. 1) $(\mathrm{k}+2)^2+(\mathrm{k}+1)+1$　2) $2(2x+3y)^2+7(2x+3y)-15$

3) $a^2+2ab+b^2-7a-7b+10$　4) $15x^2-359xy-246y^2-3x-2y$

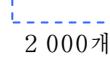
15. 1) $x^2+(2y+2)x+y^2+2y+1$　2) $3mnp^2-(9m+2n)p+6$

3) $2a^2+4ab+2b^2+a+b$　4) $x^2y+xy^2+x^2+xy-3x-3y$

16. 1) $(x-y)^3-(m-n)^3-(n-m+x-y)^3$

2) $(x-y)z^2+(x^3-y^3)z+(x^2-y^2)$

17. $a+b=5$, $ab=6$일 때 a^2+b^2과 a^3+b^3의 값을 구하여라.

18. 수 $1\underbrace{000\cdots0}_{2\,000개}1$이 합성수라는것을 밝혀라.(가운데 0의 개수는 2 000개이다.)

19. 다음것을 계산하여라.

1) $1+x+x^2+x^3+x^4=0$일 때 $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{1999}$의 값

2) $a^2-3a+1=0$일 때 $2a^5-5a^4+2a^3-8a^2+3a$의 값

3) $a+b=1$일 때 a^3+b^3+3ab의 값

4) $a+b+c=0$, $a^3+b^3+c^3=0$일 때 $a^{19}+b^{19}+c^{19}$의 값

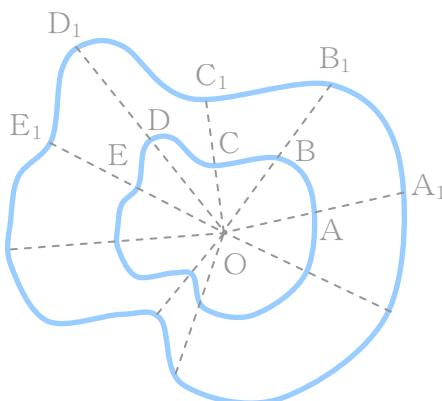
5) $a=2000x+1999$, $b=2000x+2000$, $c=2000x+2001$일 때 $a^2+b^2+c^2-cb-ab-ac$의 값

6) $a-b=3$, $b-c=5$일 때 $a^2+b^2+c^2-ab-cb-ac$의 값

20. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $2\cdot(3+1)\cdot(3^2+1)\cdot(3^4+1)\cdot\cdots\cdot(3^{64}+1)+1$

2) $\dfrac{1999^3-1000^3-999^3}{1999\times1000\times999}$

제8장. 닮은 도형과 구부린 도형

3각형에서의 비례선분

닮은 도형

구부린 도형

제1절. 3각형에서의 비례선분

$\triangle ABC$판에서 점 B_1, B_2는 변 AB를 3등분하는 점이다.

여기서 $BC//B_1C_1//B_2C_2$, $AC//B_1D_1//B_2D_2$이다. $\triangle ABC$를 그림 8－1과 같이 아낙에 있는 선에 따라 갈라놓았다.

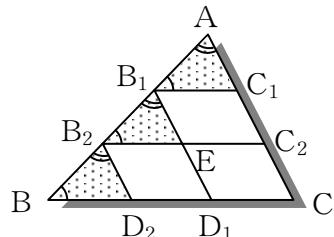



그림 8－1

알아보기 1. $\triangle AB_1C_1$을 AB방향으로 평행이동해가면 $\triangle B_1B_2E$, $\triangle B_2BD_2$에 겹쳐놓을수 있겠는가?

2. $B_1E=C_1C_2$, $B_2D_2=C_2C$인가?

3. $AC_1=C_1C_2=C_2C$인가?

$\triangle ABC$에서 B_1, B_2가 변 AB의 3등분점이고 $B_1C_1//B_2C_2//BC$이면 C_1, C_2도 변 AC의 3등분점이다.

이것은 4등분, 5등분, …인 때도 꼭같이 말할수 있다.

례 1 쇠줄 AB를 4등분하여라.

(풀이) 점 A를 지나는 반직선 AC를 긋고 콤파스로 $AC_1=C_1C_2=C_2C_3=C_3C_4$ 되게 점 C_1, C_2, C_3, C_4를 찍자. 선분 BC_4를 긋고 점 C_3, C_2, C_1에서 선분 BC_4에 평행인 직선을 그어 선분 AB와 사귀는 점을 B_3, B_2, B_1로 표시하면 B_1, B_2, B_3은 선분 AB를 4등분한다.

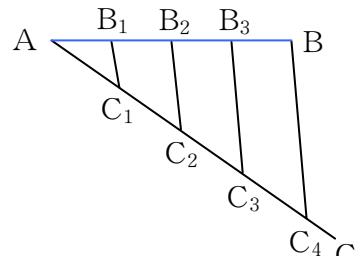



그림 8－2

문 제

1. 그림 8－1에서 점 D_1, D_2도 선분 BC를 3등분하는가?

2. 그림 8－1에서 $\dfrac{AB_1}{AB}=\dfrac{AC_1}{AC}=\dfrac{B_1C_1}{BC}$인가?

알아보기 그림 8－3의 △ABC에서 $AB_1:AB=1:3$이고 $B_1C_1//BC$이다.

1. $AC_1:AC=1:3$인가?
2. $B_1C_1:BC$는 얼마인가?

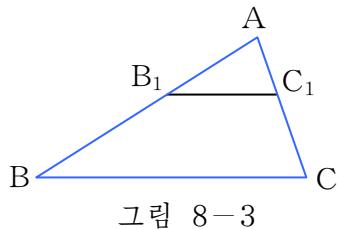



그림 8－3

3각형에서 한 변에 평행인 직선

△ABC에서 $B_1C_1//BC$이면

1) $\frac{AB_1}{AB}=\frac{AC_1}{AC}=\frac{B_1C_1}{BC}$

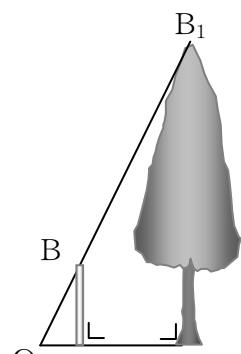
2) $\frac{AB_1}{B_1B}=\frac{AC_1}{C_1C}$

례 2 위대한 수령 **김일성**대원수님께서 손수 정원에서 키우시다가 온 나라에 퍼지도록 해주신 수삼나무는 지금 방방곡곡에서 키높이 자라고있다. 영남이는 수삼나무밑에서 5m 되는 지점 O를 잡고 그림 8－4와 같이 길이가 3m인 막대기 AB를 세웠다. 이때 OA＝1m였다. 수삼나무의 높이는 얼마인가?

그림 8－4

(풀이) $\frac{OA}{OA_1}=\frac{AB}{A_1B_1}$

$$A_1B_1=\frac{AB}{OA}\cdot OA_1=\frac{3}{1}\cdot 5=15(m)$$

답. 15m

문 제

1. 그림 8－4에서 BB_1은 OB의 몇배인가?
2. 웃례에서 수삼나무의 높이가 18m이라면 막대기는 몇m인가?

알아보기 그림 8－5의 $\triangle ABC$에서 $AB_1:B_1B=AC_1:C_1C=2:3$이다.
점 B_1에서 BC에 평행인 직선을 그으면 그 직선은 점 C_1을 지난다. 왜 그런가?

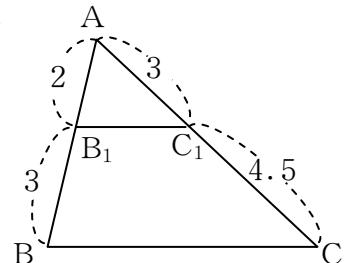



그림 8－5

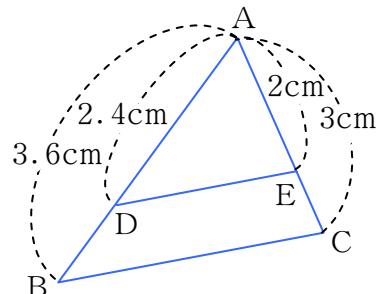
3각형의 두 변을 같은 비로 나누는 직선

$\triangle ABC$에서 $\frac{AB_1}{B_1B}=\frac{AC_1}{C_1C}$이면 $B_1C_1//BC$

문 제

1. 그림 8－6에서 DE//BC인가?
2. 그림 8－6의 $\triangle ABC$에서 다음과 같은 경우에 DE//BC인가?
   1) AD＝2, DB＝1, AE＝2.9, EC＝4.4
   2) AD＝2, AB＝4, AE＝$\frac{3}{2}$, AC＝3

그림 8－6

련습문제

1. 그림 8－7에서 DE//BC이다. AB의 길이를 구하여라.

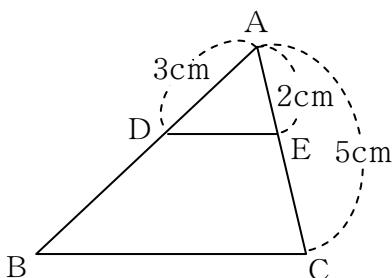



그림 8－7

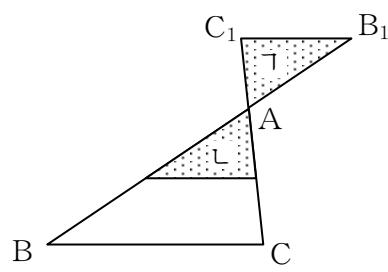



그림 8－8

2. 그림 8－8에서 $C_1B_1//BC$이고 $\frac{AB_1}{AB}=\frac{1}{2}$이면 $\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{1}{2}$이다. 왜 그런가?
   (3각형 ㄱ을 180°회전이동하여 3각형 ㄴ의 자리에 놓고 생각하여라.)
3. 문제 2에서 $B_1C_1=4cm$일 때 BC의 길이를 구하여라.

4. 높이가 30m인 나무의 그림자가 6m였다. 순철이의 그림자가 30cm이면 순철이의 키는 얼마인가?

5. 강의 폭이 200m이다. 지점 A에서 강건너 지점 B까지 거리를 구하기 위하여 AC_1, AB_1의 길이를 쟀다. $AC_1=50$m, $AB_1=90$m라고 한다. A와 B사이의 거리를 구하여라. 여기서 $BC//B_1C_1$이다.(그림 8－9)

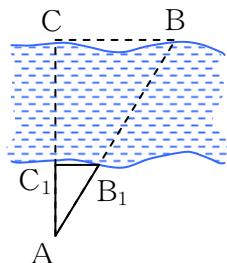



그림 8－9

제2절. 닮은 도형

해보기 그림 8－10은 크기가 서로 다른 우리 나라 지도이다. 두 지도에서

1. 평양과 함흥, 평양과 개성, 평양과 부산사이의 거리를 재서 그 비를 구해보아라.

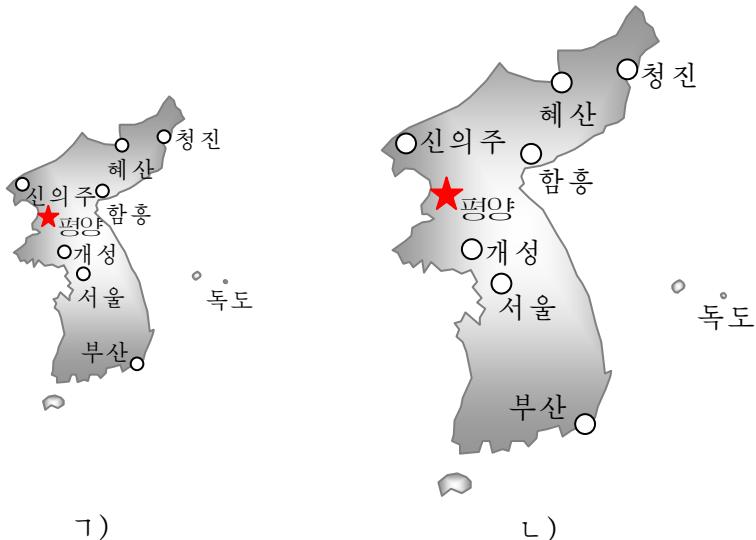



그림 8－10

2. 평양과 신의주, 혜산과 청진사이의 거리를 재서 그 비를 구해보아라. 같은가? 먼저 구한 비와 비교하여라.

그림 8－10의 ㄴ)지도에서 아무렇게나 잡은 두곳사이의 거리는 ㄱ)지도에 있는 같은 두곳사이의 거리의 2배이다. 이때 ㄴ)지도는 ㄱ)지도를 2배로 **늘였다고** 말하고 ㄱ)지도는 ㄴ)지도를 $\frac{1}{2}$로 **줄였다고** 말한다.

그리고 ㄱ)과 ㄴ)은 **닮았다**고 말한다.

일반적으로 도형 F의 임의의 두 점사이의 거리를 2배로 늘여서 도형 F_1을 얻었다면 도형 F_1은 도형 F를 2배로 **늘인도형**이라고 부르며 $\frac{1}{2}$로 줄여서 도형 F_1을 얻었다면 F_1은 도형 F를 $\frac{1}{2}$로 **줄인도형**이라고 부른다.

(F) (F$_1$)

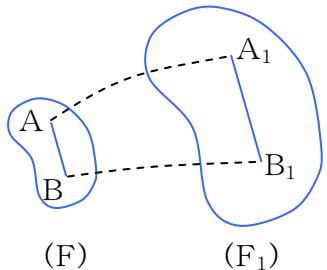



그림 8-11

도형 F의 임의의 두 점을 A, B, 그에 대응하는 F_1의 점들을 각각 A_1, B_1로 표시하면

$A_1B_1=2AB$ → F_1은 F를 2배로 늘인 도형

$A_1B_1=\frac{1}{2}AB$ →F_1은 F를 $\frac{1}{2}$배로 줄인 도형

례 1 $\frac{1}{50000}$로 줄인 지도에서 두 도시 A, B사이의 거리가 5cm이다.(그림 8-12)

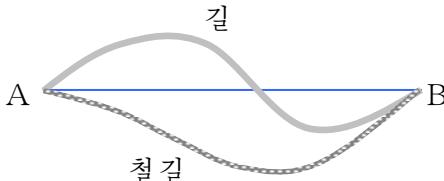



그림 8-12

1) 두 도시 A, B사이의 실제거리를 구하여라.

2) 두 도시 A, B를 맺는 길, 철길의 실제길이를 구하여라.

(풀이) 1) $5\times50000=250000$(cm)

따라서 A, B사이의 실제거리는 2.5km

2) 길과 철길에 따라 실을 일치시켰다가 그 길이를 재면 7.8cm, 7.2cm이다.

따라서 $7.8\times50000=390000$(cm)

$7.2\times50000=360000$(cm)

따라서 길의 길이는 3.9km

철길의 길이는 3.6km

실제지형을 $\frac{1}{50000}$로 줄였을 때 비 《1:50 000》을 **축척**이라고 부른다.

문 제

1. 축척 1:1 000인 지도에서 거리가 40cm로 나타나는 두 지점은 축척 1:50 000인 지도에서 그 거리가 얼마로 나타나겠는가?
2. 그림 8−13의 ㄴ), ㄷ), ㄹ)가운데서 어느것이 ㄱ)의 닮은 도형인가?

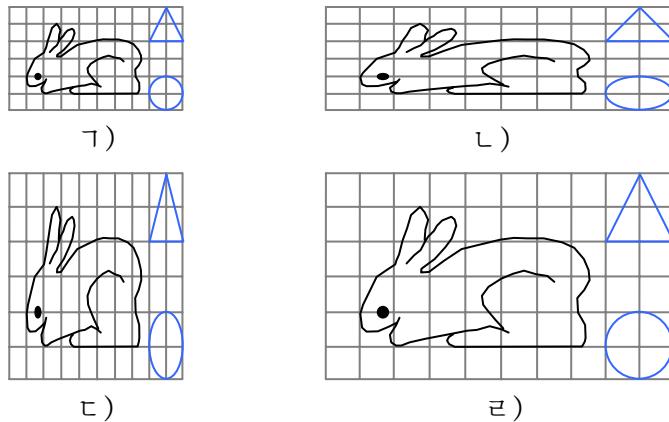



그림 8−13

3. 변의 길이가 3cm인 바른3각형을 3배로 늘인 3각형의 변의 길이를 구하여라. 늘인 3각형은 어떤 3각형인가?
4. 축척이 1:30 000 000인 지도가 있다. 실제거리가 1 500km인 두 도시사이의 거리가 줄인 지도에서는 얼마로 나타나는가?

1. 그림 8 − 14에서 $A_1B_1 = 2AB$, $B_1C_1 = 2BC$, $C_1A_1 = 2CA$이다. 왜 그런가?
2. 도형 F_1은 도형 F를 2배로 늘인것이라고 말할수 있는가? $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$, $\angle B_1C_1A_1 = \angle BCA$, $\angle C_1A_1B_1 = \angle CAB$이겠는가?

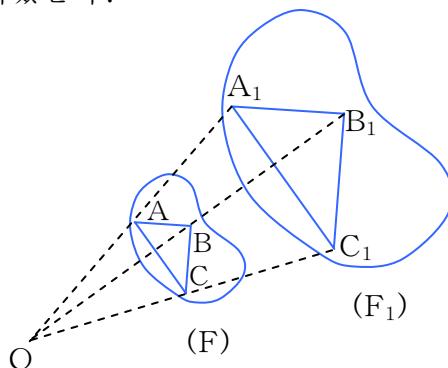



그림 8−14

도형을 늘이거나 줄일 때 각의 크기는 달라지지 않는다.

어떤 도형의 늘인 도형이나 줄인 도형을 그릴 때에는 그 도형의 테두리만 그리면 된다.

그림 8-15

례 2 다각형 ABCDE를 $\frac{1}{4}$로 줄인 도형을 그려라.

(풀이) 5각형 ABCDE아낙에 점 O를 잡고 O와 점 A, B, C, D, E를 맺는다. 다음

$$\frac{OA_1}{OA}=\frac{OB_1}{OB}=\frac{OC_1}{OC}=\frac{OD_1}{OD}=$$

$$=\frac{OE_1}{OE}=\frac{1}{4}$$

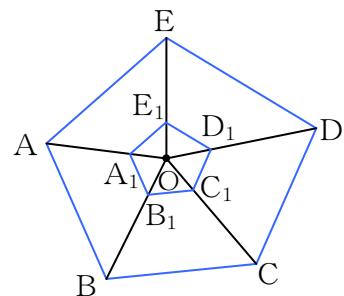
인 점 A_1, B_1, C_1, D_1, E_1를 그림 8-15와 같이 잡고 다각형 $A_1B_1C_1D_1E_1$을 그리면 이것은 5각형 ABCDE를 $\frac{1}{4}$로 줄인 도형이다.

곡선도형을 늘이거나 줄일 때에는 그 테두리에 몇개의 점을 찍고 다각형에서와 같이 한 다음 미끈하게 이어가는 방법을 쓴다.

그림 8-16

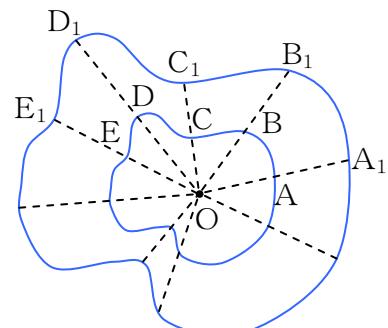
례 3 그림 8-16의 곡선도형 ABCD…를 2배로 늘여라.

(풀이) 곡선도형의 아낙에 점 O를 잡고 O와 그 테두리의 점 A, B, C, D, …를 맺고

$$\frac{OA_1}{OA}=\frac{OB_1}{OB}=\frac{OC_1}{OC}=\frac{OD_1}{OD}=\cdots=2$$

되게 점 A_1, B_1, C_1, D_1, …을 찍는다.

점 A_1, B_1, C_1, D_1, …을 그림과 같이 미끈하게 이으면 된다.

이때 점 A, B, C, D…를 더 잘게 찍으면 더 정확한 도형을 얻을수 있다.

문 제

1\. 5각형 ABCDE밖에 점 O를 잡고 이 5각형을 $\frac{1}{3}$로 줄인 도형을 그려보아라. (그림 8−17)

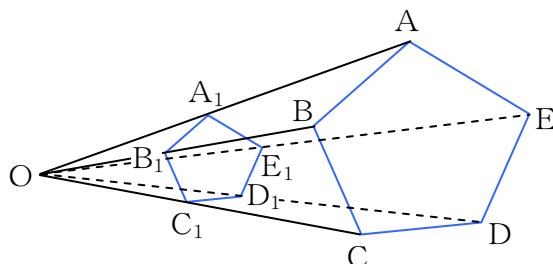
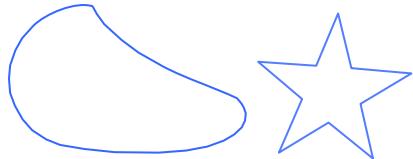



그림 8−17　　　　　　　　그림 8−18

2\. 1) 4각형을 하나 그리고 그것을 2배로 늘여라.

2) 4각형을 하나 그리고 그것을 $\frac{3}{4}$으로 줄여라.

3\. 주어진 도형들을 2배로 늘여라.(그림 8−18)

4\. 원, 부채형을 늘이거나 줄이는 방법을 생각해보아라.

고조선시기의 직각자 − 《구》

우리 선조들은 고조선시기부터 《ㄴ》자모양의 직각자를 리용하여 여러가지 높이와 깊이, 거리를 재였다.

례를 들어 나무의 높이를 다음과 같이 재였다.

직각자를 땅우에 ㄴ자모양으로 세우고 나무의 웃끝과 자의 두 팔의 끝점들이 한 직선에 놓이도록 한다. 이때 자의 땅에 접한 팔의 길이 a와 세운 팔의 높이 b 그리고 자로부터 나무까지의 거리 A를 잰다. 나무의 높이를 H라고 하면 $H:A=b:a$이므로 나무의 높이는 $H=\frac{b}{a}\cdot A$이다.

이것은 B.C.2천년이전인 고조선시기에 벌써 우리 선조들이 도형의 비례에 대한 지식을 알고있었다는것을 보여준다.

우리 선조들은 이 직각자를 《구》라고 불렀다.

련 습 문 제

1. 바른4각형 F를 2배로 늘인 바른4각형 F_1에서 변의 길이가 14cm이면 바른4각형 F의 면적은 얼마인가?
2. 청진항에서 450km 되는 곳에서 수산사업소의 어선단이 많은 물고기를 잡았다. 축척 1:30 000인 지도에서 그 거리는 얼마인가?
3. 실제거리가 400m인것이 건설도면에서 5cm로 나타났다. 이 건설도면의 축척을 구하여라.
4. 자기 학교의 청사, 식당, 운동장, 울타리 등이 그려진 도면을 1:1 000의 축척으로 대강 그려보아라.
5. 도형 F를 $\frac{4}{3}$배로 늘인 다음 $\frac{4}{5}$로 줄여 도형 F_1을 얻었다. 도형 F_1은 도형 F를 늘인것인가 줄인것인가?

제3절. 구부린 도형

도형의 늘이기와 줄이기는 평면에 놓인 도형을 골고루 늘이거나 줄인것이다. 우리 주변에는 이런 도형의 줄이기, 늘이기뿐아니라 그보다 더 복잡한 도형적변형들이 많다.

알아보기 그림 8-19와 같은 쇠줄토막이 있다. 이 쇠줄토막을 구부려 우리 글의 어떤 자모를 만들수 있겠는가?

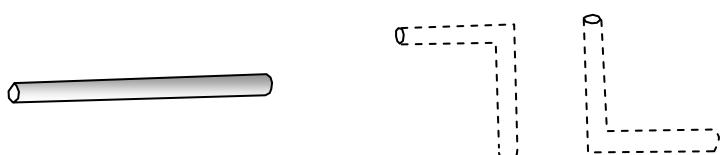



그림 8-19

도형을 어느 점도 겹치지 않게 변형하는것을 도형의 구부리기라고 부른다. 이때 얻어진 도형을 구부린 도형이라고 부른다.

1. 선분을 구부리기하여 그림 8-20과 같은 도형들을 얻을수 있는가?

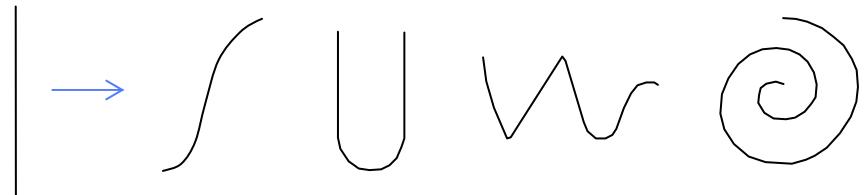



그림 8-20

2. 원둘레를 구부리기하여 그림 8-21과 같은 도형들을 얻을 수 있는가?

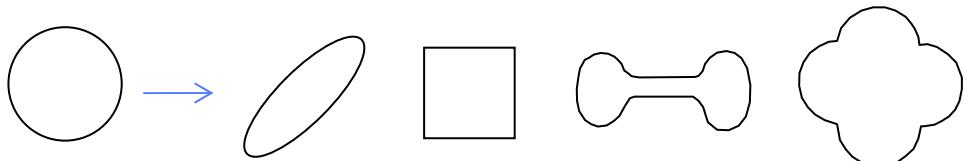



그림 8-21

선분을 구부리기하면 벌어진선이 얻어진다.
원둘레를 구부리기하면 다문선이 얻어진다.

나무를 구부리기하여 그림 8-22와 같은 도형을 얻을수 있다.

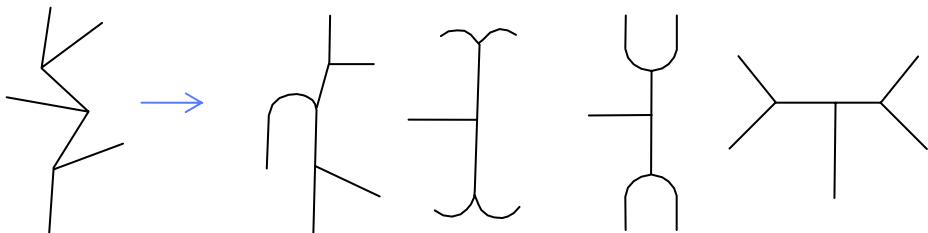



그림 8-22

나무를 구부리기한 도형도 처음 나무와 꼭같은 나무로 본다.
나무에서 정점을 마디점, 선토막을 마디라고 부른다.

문 제

1. 그림 8－23과 같은 변형에서 구부리기를 찾아보아라.

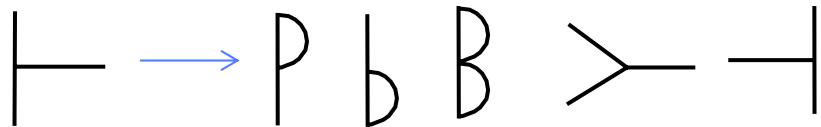



그림 8－23

2. 그림 8－24와 같은 변형에서 구부리기를 찾아보아라.

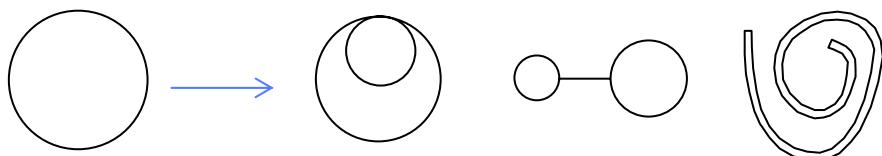



그림 8－24

찾기 1. 선분을 구부리기하여 얻어지는 영어자모를 찾아보아라.
2. 원둘레를 구부리기하여 얻어지는 자모를 찾아보아라.

나무에서 마디점수와 마디수를 각각 a, b로 표시하였을 때 $a-b$를 그 나무의 특성수라고 부르고 χ로 표시한다.

알아보기 1. 나무(그림 8－22)에서 특성수는 얼마인가?
2. 나무의 구부리기에서 특성수가 변하는가?

문 제

1. 도형의 줄이기와 늘이기에서 나무의 특성수가 변하는가?
2. 그림 8－25의 나무에서 A로부터 B로 가는 길은 몇개인가? 다른 나무에서도 생각해보아라.

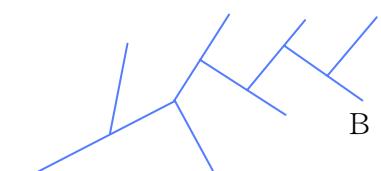
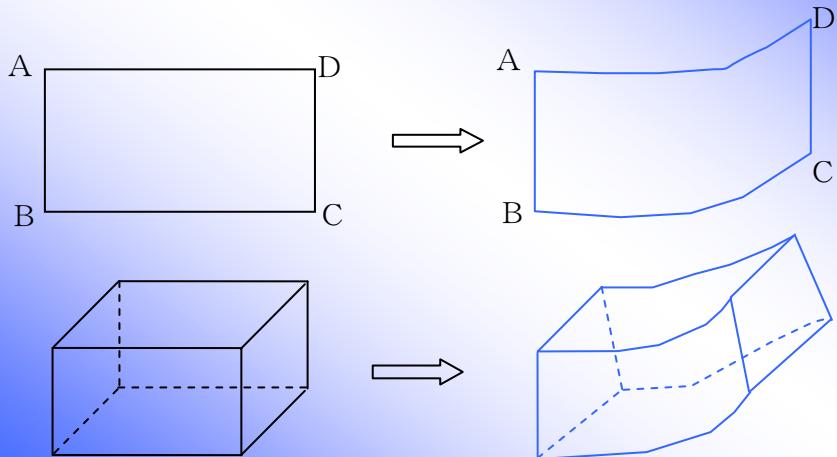



그림 8－25

직4각형, 직6면체를 구부리기하면 그림과 같이 찌그러진 도형이 얻어진다.

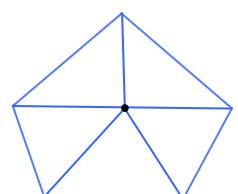
이때 변하는것과 변하지 않는것을 알아보아라. (선과 면의 모양, 점과 선, 면의 개수)

련습문제

1. 그림 8−26에서 어느 선분들을 떼여버리면 나무가 되는가?

2. 평양시내 지하철도역과 그 로선을 나무로 나타내여라.

3. 평양과 각 도소재지들을 련결하는 도로를 나무로 나타내여라.

그림 8−26

4. 그림 8−26의 다각형에서 (정점수)−(변의 수)+(다각형의 수)와 이 다각형에서 몇개의 변을 떼여 나무를 만들었을 때 이 나무에서(마디점수)−(마디수)를 비교하여라.

복 습 문 제

1. 그림 8－27에서 $AB // A_1B_1$이고 $AB=3m$, $OA=4m$, $OA_1=7m$이다. A_1B_1를 구하여라.

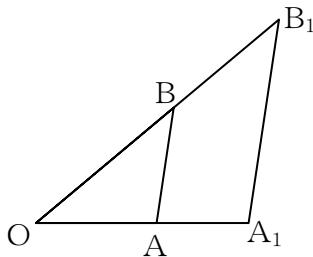



그림 8－27

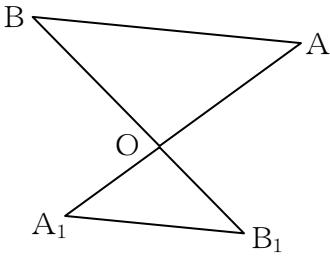



그림 8－28

2. 그림 8－28에서 $OA_1=2.3m$, $OB_1=2.6m$, $OA=3.45m$, $OB=3.9m$이다. $A_1B_1=3.2m$일 때 AB의 거리를 구하여라.

3. 위대한 수령 **김일성**대원수님께서는 12살 나시던 해에 조국의 현실을 더 잘 아시기 위하여 바다오거우에서 만경대까지 혼자 걸어서 나오시였다. 축척 1:2 700 000인 지도에서 바다오거우로부터 만경대까지의 거리는 12cm이다.
   1) 바다오거우로부터 만경대까지의 직선거리를 구하여라.
   2) 바다오거우와 만경대사이의 실제거리는 직선거리보다 200리나 더 멀다. 실제거리를 구하여라.

4. 교실에 있는 지도를 리용하여 다음 두 도시사이의 거리를 구하여라.
   1) 평양과 혜산
   2) 개성과 서울
   3) 보천보와 삼지연

5. 직4각형 F를 2배로 늘여 F_1을 얻었다.(그림 8－29)

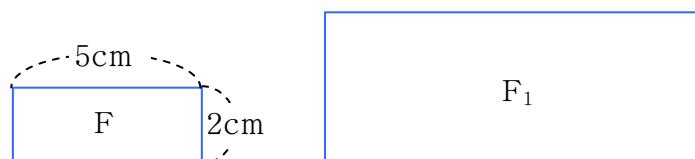



그림 8－29

1) 직4각형 F_1의 둘레의 길이를 구하여라. 둘레는 몇배로 늘어났는가?

2) 직4각형 F_1의 면적을 구하여라. 면적은 몇배로 늘어났는가?

6. 영웅적조선인민군의 한 경비정이 축척 1:50 000인 지도에서 36cm 이동하였다. 이동한 실제거리는 얼마인가?

7. 조선인민군의 한 정찰조가 축척이 1:20 000인 지도에서 목적지까지의 거리를 재였다. 첫 목적지까지의 거리는 18cm이고 첫 목적지에서 둘째 목적지까지의 거리는 첫 목적지까지의 거리의 2.5배이다. 정찰조가 둘째 목적지까지 가야 할 실제거리는 얼마이겠는가?

8. 다음 도형들을 3배로 늘여라.(그림 8—30)

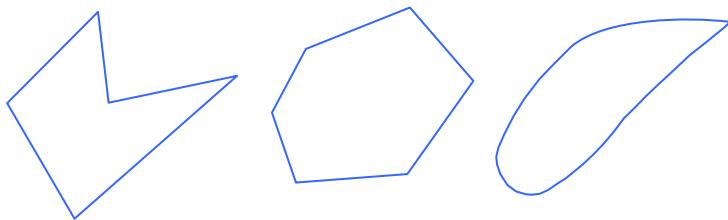
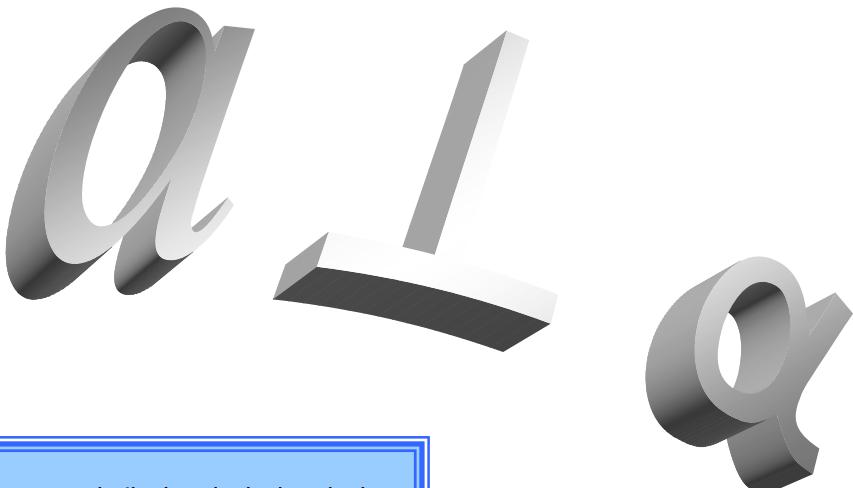



그림 8—30

9. 3각형에서의 비례선분의 성질을 쓰는 응용문제를 만들고 풀어라.

제9장. 공간도형

공간에서 직선과 평면

다면체

회전체

립체의 겉면적과 체적

$$m-n+p=2$$

제1절. 공간에서 직선과 평면

1. 평면

평면은 사방으로 끝없이 평평하게 펼쳐져있다. 평면은 보통 평행4변형처럼 나타내며 하나의 글자 α로 표시하고 《평면 α》와 같이 읽는다.(그림 9－1)

그림 9－1

해보기 평평한 판우에 두 점 A, B를 찍고 그 두 점을 지나도록 곧은 자를 대보아라. 틈이 생기는가? 만일 굽은 면에 곧은 자를 대면 어떤가?(그림 9－2)

그림 9－2

평면에 있는 두 점 A, B를 지나는 직선은 그 평면에 완전히 놓인다.

해보기 직선 AB를 지나는 평면은 많다. 이 평면들가운데서 직선 AB에 놓이지 않는 점 C를 지나는 평면을 잡아보아라. 하나로 정해지는가를 알아보아라.(그림 9－3)

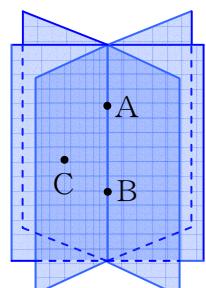



그림 9－3

한 직선 AB와 그에 놓여있지 않는 점 C는 하나의 평면을 결정한다.

알아보기 한 직선에 놓이지 않는 세 점 A, B, C는 하나의 평면을 결정한다고 말할 수 있는가?
네 점 A, B, C, D는 어떤가? 있을 수 있는 경우를 생각해보아라.(그림 9−4)

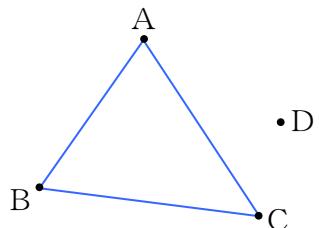



그림 9−4

문 제

1. 다음의 경우는 하나의 평면을 결정하는가?
   1) 사귀는 두 직선
   2) 평행인 두 직선
   3) 사귀는 세 직선
2. 곧은 자를 판우에 이리저리 여러가지로 놓아보아도 틈이 생기지 않았다. 그 판은 평면으로 볼수 있는가?
3. 3개의 다리를 가진 책상은 뒤뚝거리지 않지만 4개의 다리를 가진 책상은 뒤뚝거릴 때가 있다. 왜 그런가?

2. 두 직선의 자리관계

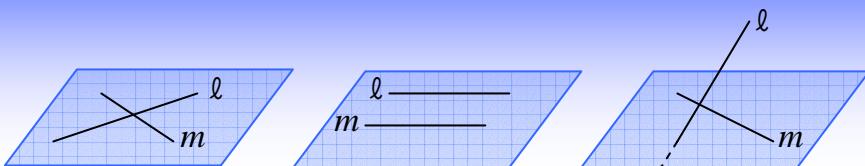
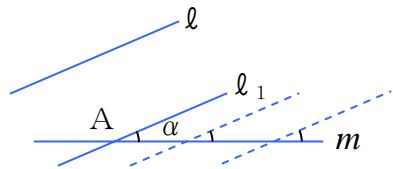
교실에서 평행인 두 직선, 사귀는 두 직선, 평행도 아니고 사귀지도 않는 두 직선을 찾아보아라.

어기는 두 직선 ℓ과 m이 있을 때 m의 임의의 점 A에서 $\ell // \ell_1$인 직선 ℓ_1을 그었을 때 생기는 각 α를 ℓ과 m사이의 각으로 정한다.

그림 9－5

문 제

1. 그림 9－6에서 맞물고있는 두 치차의 축이 서로 어떤 자리관계에 있는가를 말하여라. 두 치차사이의 각이 30°라고 하면 그 30°는 어느 각을 의미하는가?

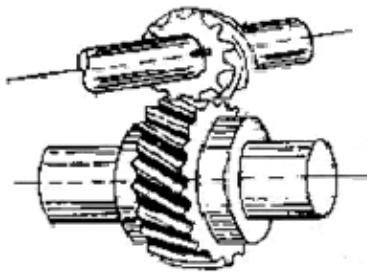



그림 9－6

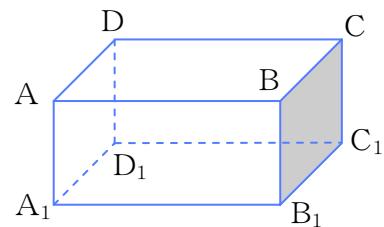



그림 9－7

2. 그림 9－7과 같은 직6면체의 모서리들가운데서 모서리 B_1C_1에 평행인것, 어기는것을 말해보아라.
3. 그림 9－8과 같은 도형에서 어기는 직선들을 말하여라.
4. 그림 9－7에서 모서리 AB와 B_1C_1은 몇도의 각으로 어기고있는가?

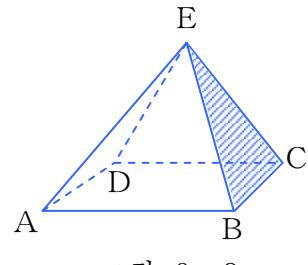



그림 9－8

3. 직선과 평면의 자리관계

찾기 그림 9－9에서 AB, AC, DD_1은 바닥면과 어떤 자리관계를 가지는가? 바닥면과 사귀지 않는 직선, 바닥면과 한 점에서 사귀는 직선, 아주 바닥면에 놓이는 직선들을 찾아보아라.

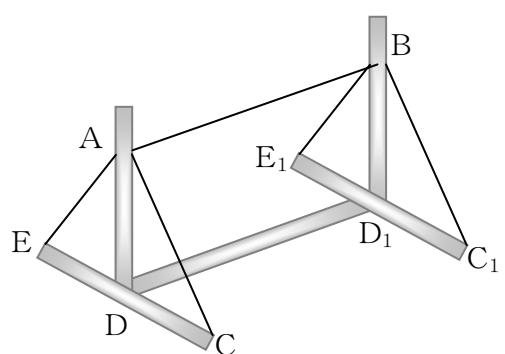



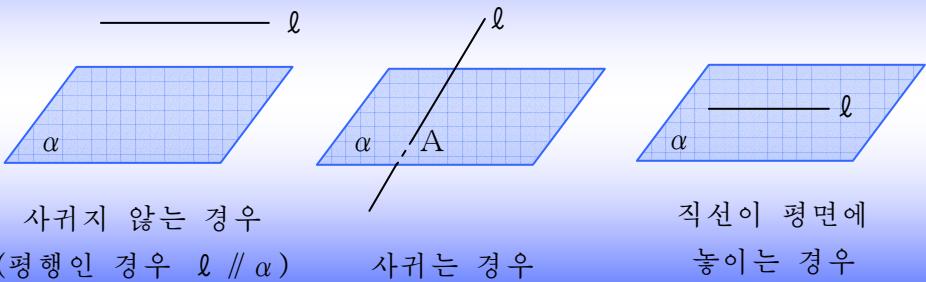
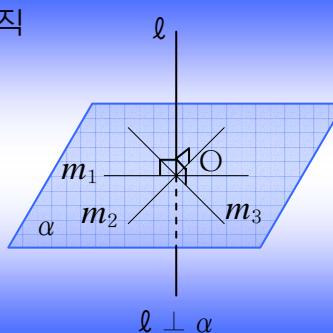
그림 9－9

문 제

그림 9－7과 같은 직6면체에서

1) 면 $A_1B_1C_1D_1$에 평행인 모서리들
2) 면 $A_1B_1C_1D_1$과 사귀는 모서리들
3) 면 $A_1B_1C_1D_1$에 놓이는 모서리들

을 말하여라.

가로등을 세울 때나 기둥을 세울 때 어느 한쪽으로 기울어져서는 안된다. 즉 사방으로 90°가 되여야 한다. 이와 같이 직선 ℓ이 평면 α와 점 O에서 사귈 때 그 직선이 점 O를 지나는 평면 α의 모든 직선과 수직인 경우를 생각할수 있다.

해보기 그림 9－10과 같이 연필을 책상우에 두 직각자에 맞대여 세웠다. ∠AOB에 다른 직각자를 대보아라. 틈이 생기는가?

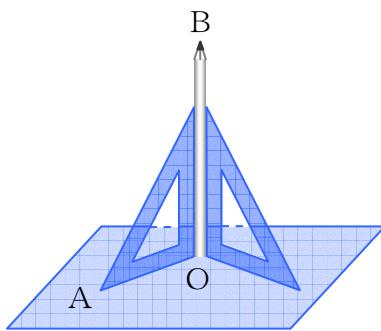



그림 9－10

직선과 평면의 수직조건

직선 ℓ이 평면 α와 점 O에서 사귀고 O를 지나는 α의 두 직선과 각각 수직이면 ℓ은 α에 수직이다. 즉

$$\ell \perp a, \ \ \ell \perp b \text{이면 } \ell \perp \alpha$$

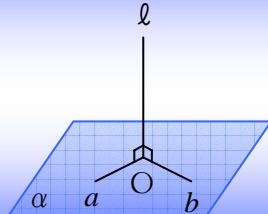
문 제

1. 그림 9－11과 같이 직4각형종이를 둘로 꼭맞게 접었다가 평면에 세워놓았다. 이때 접은 자리 a는 α와 수직인가?

그림 9－11

2. 그림 9－12의 직6면체에서
   1) 모서리 AE가 평면 ABCD에 수직이라고 말할 수 있는가? 다음 빈 곳에 알맞는것을 써넣어라.
      EA⊥AD, EA□AB이므로 EA□평면 ABCD
   2) △EAC는 무슨 3각형인가?
      EA⊥평면 ABCD이므로 EA□AC, 따라서 △EAC는 □3각형이다.
   3) ∠HFG□90°이므로 HF⊥평면 BCGF가 아니다.
      ∠HBD□90°이므로 HB⊥평면 ABCD가 아니다.

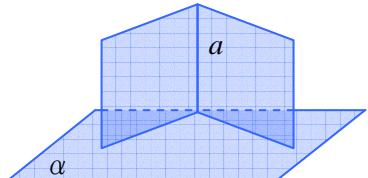
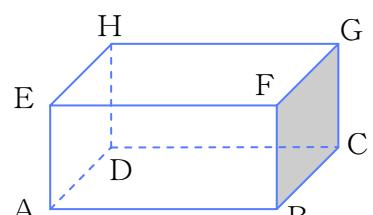



그림 9－12

찾기 평면 α 밖의 한 점 A와 이 평면의 점 A_1, B, C를 선분으로 맺었다. $AA_1 \perp \alpha$ 일 때 선분 AA_1, AB, AC가운데 제일 짧은것을 찾아라.

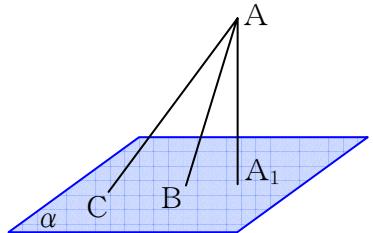



그림 9－13

점에서 평면까지의 거리

수직선 AA_1의 길이를 점 A에서 평면 α 까지의 거리라고 부르고

$$d(A, \alpha)$$

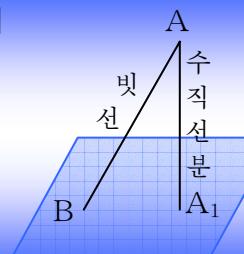
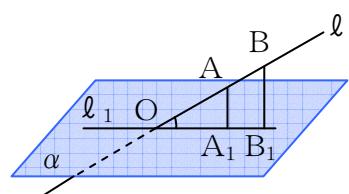
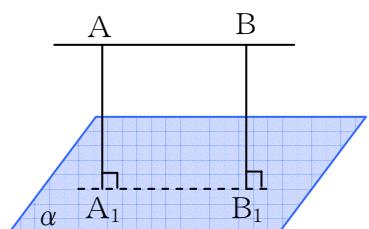
와 같이 표시한다.

점 A에서 평면 α 에 수직이 아닌 직선 AB를 그었을 때 직선 AB를 **점 A에서 평면 α 에 그은 빗선**이라고 부른다. 이때 선분 AB를 **빗선**, 그의 길이를 **빗선의 길이**라고 부를 때도 있다.

그림 9－14

평면 α 밖의 한 점 A에서 α 에 세운 수직선의 밑점 A_1을 **점 A를 평면 α 에 비친 바른사영**이라고 부른다. 또한 점 A_1은 **점 A를 평면 α 에 바로 사영하여 얻었다**고 말한다.

평면 α 에 대한 빗선 ℓ 이 있을 때 ℓ 의 모든 점을 평면 α 에 바로 사영하면 직선 ℓ 의 바른사영인 직선 ℓ_1을 얻는다. 여기서 ℓ 과 ℓ_1사이의 각을 **직선 ℓ 과 평면 α 가 이루는 각**이라고 부른다.

직선 AB가 평면 α 에 평행일 때 직선 AB의 점 A, B에서 평면 α 에 수직선분 AA_1, BB_1을 그으면 $AA_1=BB_1$이다. 이때 수직선분 AA_1의 길이를 **직선 AB와 평면 α 사이의 거리**라고 부르고 $d(AB, \alpha)$와 같이 표시한다.

그림 9－15

문 제

1. 교실의 천정모서리로부터 교실바닥까지의 거리라고 할 때 어느것을 말하는가?
2. 그림 9－16에서 직선 ℓ과 평면 α가 이루는 각은 60°이다. 선분 AO의 길이가 3cm일 때 AO를 α에 비친 바른사영 A_1O의 길이는 얼마이겠는가?

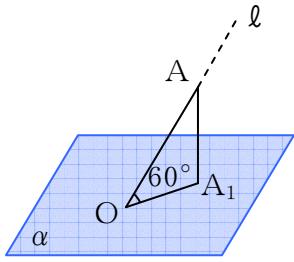



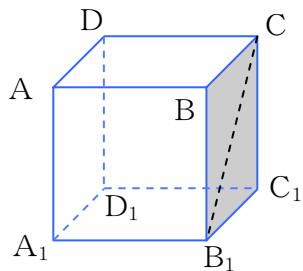
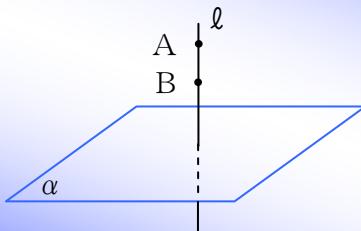
그림 9－16　　　그림 9－17

3. 그림 9－17은 바른6면체이다. 직선 CB_1과 면 $A_1B_1C_1D_1$사이의 각은 얼마인가?

4. 두 평면의 자리관계

그림 9－18은 직6면체이다. 다음의 두 평면은 사귀겠는가?

1) 평면 ABCD와 평면 $A_1B_1C_1D_1$
2) 평면 ABCD와 평면 AA_1D_1D

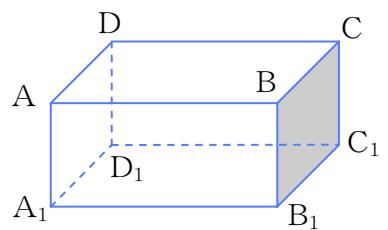
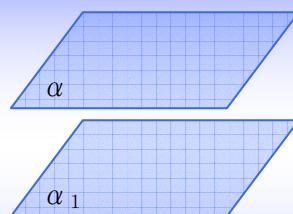
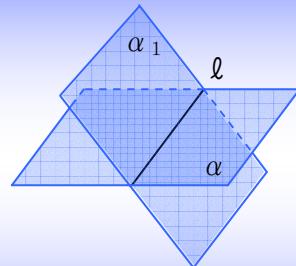



그림 9－18

알아보기

1. 두 평면이 한 점만을 공통으로 가지는 경우가 있을수 있는가?
2. 공간에서 두 평면이 평행도 아니고 사귀지도 않는 경우가 있겠는가?

두 평면 α_1, α_2의 사귐선 ℓ에 한 점 O를 잡고 그림 9-19와 같이 $\ell \perp OA$, $\ell \perp OB$인 직선 OA, OB를 각각 평면 α_1과 평면 α_2에 긋는다.

이때 ∠AOB의 크기를 **두 평면 α_1, α_2사이의 각**이라고 부른다.

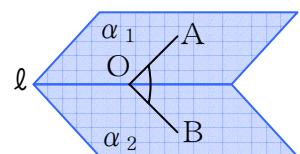
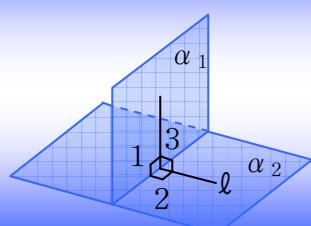



그림 9-19

두 평면의 수직

두 평면 α_1과 α_2사이의 각이 90°일 때 α_1과 α_2는 서로 수직이라고 말하고

$$\alpha_1 \perp \alpha_2$$

로 표시한다.

물체의 모양과 크기를 그림으로 나타내는데는 여러가지 방법이 있다. 그가운데서 흔히 쓰이는 방법은 물체를 평면에 바로 사영하는 방법이다. 물체를 한 평면에만 바로 사영하여서는 그 모양을 잘 알수 없다.(그림 9—20)

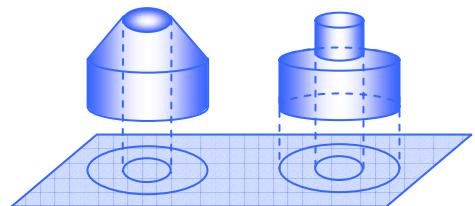



그림 9—20

그러나 물체를 그림 9—21과 같이 직각인 두 면에 바로 사영하면 물체의 모양을 잘 나타낼수 있다.

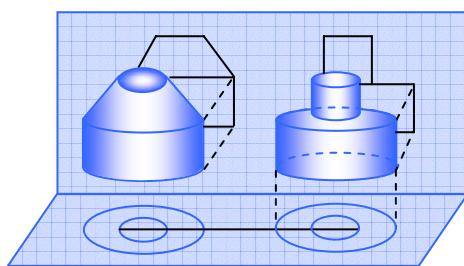
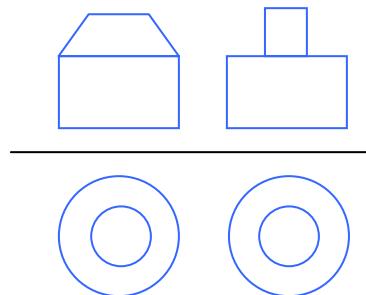



그림 9—21　　　　그림 9—22

이것을 그림 9—22와 같이 한 평면에 펴놓으면 두 면에 비친 사영한 그림이 얻어진다.

문 제

1. 그림 9—23에서 반직선 OA, OB사이의 각은 30°이고 $OO_1 \perp OA$, $OO_1 \perp OB$이다. 두 반직선 OA, OB를 선분 OO_1만큼 평행이동한것을 O_1A_1, O_1B_1이라고 할 때
   1) $OO_1 \perp O_1A_1$, $OO_1 \perp O_1B_1$이라고 말할수 있는가?
   2) $\angle A_1O_1B_1$은 몇도이겠는가?

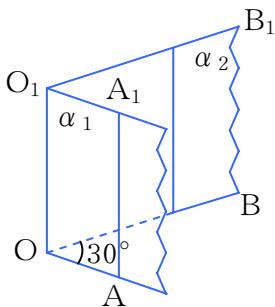
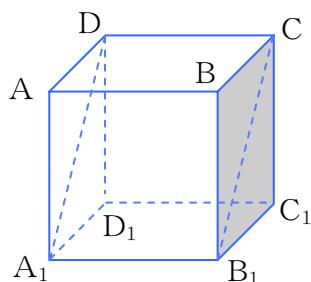



그림 9—23　　　　그림 9—24

2. 그림 9—24는 바른6면체이다. 면 $A_1B_1C_1D_1$과 면 A_1B_1CD사이의 각은 몇도이겠는가?

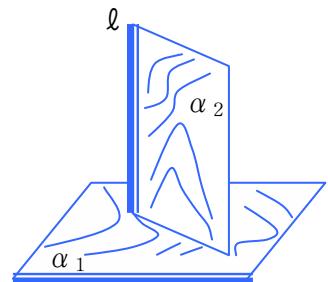
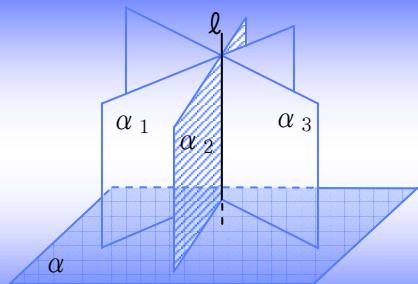
알아보기 그림 9−25에서 $\ell \perp \alpha_1$이다. 면 α_2는 늘 α_1에 수직이겠는가? 실지 삼각자로 알아보아라.

그림 9−25

두 평면의 수직조건

평면 α에 수직인 직선 ℓ이 있다.

평면 α_1, α_2가 ℓ을 지나면 그것들은 α에 수직이다.

문 제

1. 교실문을 아무렇게나 열어놓아도 그 문은 교실바닥에 수직이다. 왜 그런가?
2. 그림 9−26과 같이 드림선과 벽체의 모서리가 일치하였다면 벽체는 수직으로 섰다고 말할수 있겠는가?

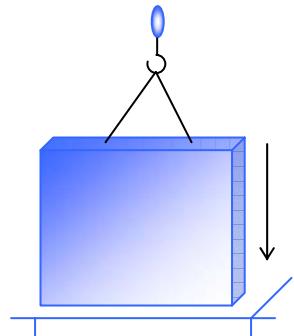



그림 9−26

《수영장의 물의 깊이가 1m이다.》라는것은 자를 수영장의 바닥에 곧추 세웠을 때 물에 잠긴 길이가 1m라는것이다.

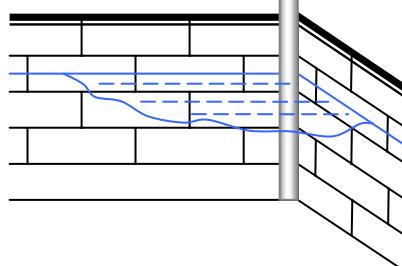
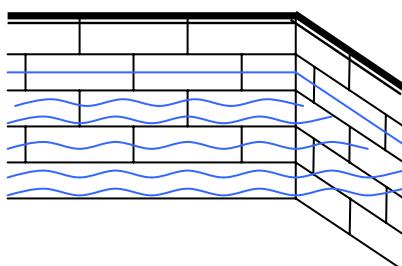



그림 9−27

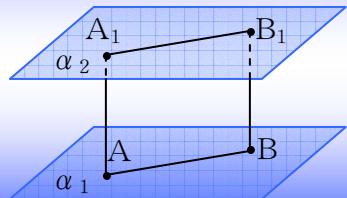
이때 자를 수영장의 다른데 곧추 세워도 잠긴 부분의 길이는 늘 1m이다.

두 평행평면사이의 거리

$\alpha_1 // \alpha_2$일 때 α_2의 점들에서 α_1에 수직선을 그으면 그 길이들은 모두 같다.

이 수직선의 길이를 두 평행평면 α_1, α_2사이의 거리라고 부르고

$$d(\alpha_1, \alpha_2)$$

로 표시한다.

문 제

교실에서 천정과 바닥사이의 거리는 벽의 어느 모서리의 길이라고 말할수 있는가?

련 습 문 제

1. 평면 α에 서로 사귀는 세 직선 AB, BC, AC가 있다. 세 직선과 평면밖의 점 D에 의하여 몇개의 평면이 정해지겠는가?(그림 9-28)

그림 9-28

2. 그림 9-29와 같이 직4각형 ABCD를 절반 접어서 접은 자리 EF가 생기게 한 다음 완전히 펴지 않은채로 평면 α에 세워놓았다. 이때 평면 α와 직4각형 ABEF, FECD는 수직인가?

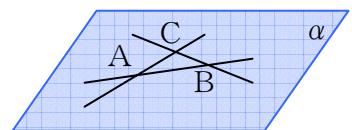



그림 9-29

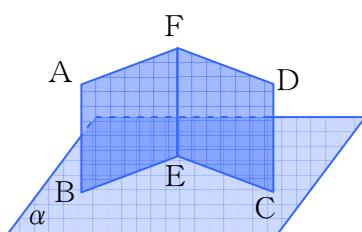
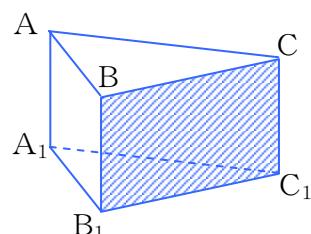



그림 9-30

3. 그림 9-30은 직6면체를 절반으로 자른 한 부분을 보여주고있다.

   1) 모서리 AB와 평행인 면, 사귀는 면들을 모두 말하여라.

   2) 모서리 AA_1과 평행인 면, 수직인 면들을 모두 말하여라.

3) 면 AA_1B_1B와 수직인 면, 사귀는 면들을 모두 말하여라.

4. 그림 9－30에서 △ABC가 AB＝AC인 직2등변3각형이라면 직선 AB와 A_1C_1은 몇도로 어기겠는가?

5. 직6면체를 그림 9－31과 같이 밑면에 수직인 한 평면 α로 잘랐을 때 생기는 4각형을 EFGH라고 하자.

그림 9－31

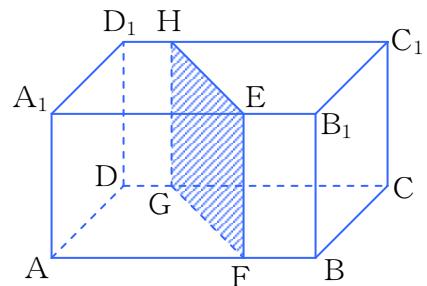
1) 이때 EH//GF라고 말할수 있는가?

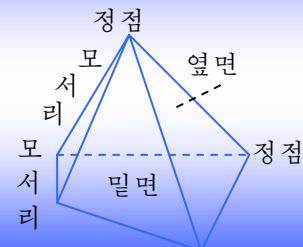
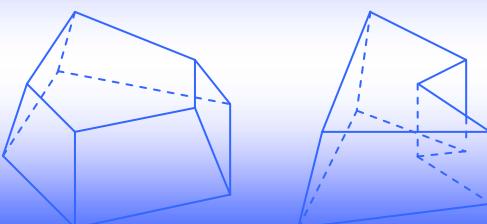
다음 빈 곳에 알맞는것을 써넣어라.

평행인 두 평면에 다른 한 평면이 사귀였을 때 그 사귐선들은 □이다.

2) 4각형 EFGH는 무슨 4각형인가?

3) 다음 빈 곳에 알맞는것을 써넣어라.

$d(A_1, ABCD)$□$d(B_1C_1, ABCD)$, $d(ABCD, A_1B_1C_1D_1)$□$d(E, F)$

제2절. 다면체

1. 다면체

다면체가운데서 면의 개수가 가장 작은것은 그림 9－32와 같이 면이 4개인것이다.

면의 개수가 4, 5, …, n인 다면체를 4면체, 5면체, …, n면체라고 부른다.

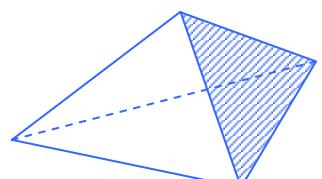



그림 9－32

찾기 1) 면들이 모두 합동인 바른3각형이고 매 정점에서 나가는 모서리수가 같은 다면체들을 찾아보아라.

2) 면들이 모두 합동인 바른4각형이고 매 정점에서 나가는 모서리수가 같은 다면체들을 찾아보아라.

면들이 모두 합동인 바른다각형들로 되여있고 매 정점에서 나가는 모서리의 개수가 같은 다면체를 바른다면체라고 부른다.

바른다면체에는 바른4면체, 바른6면체, 바른8면체, 바른12면체, 바른20면체만 있다.

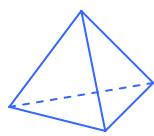
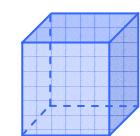
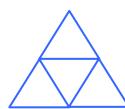
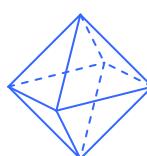
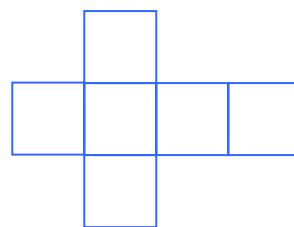
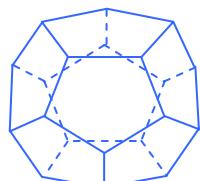
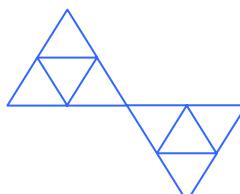
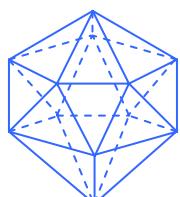
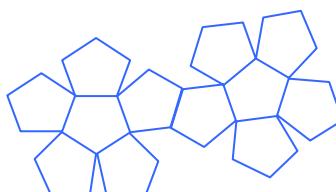
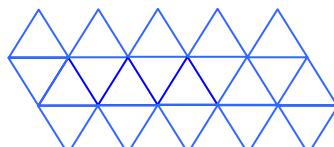



그림 9-33

그림 9－33의 ㄴ)에서와 같이 립체의 겉면을 펼쳐놓은것을 **펼친그림**이라고 부른다.

해보기 바른다면체의 정점의 개수, 모서리의 개수, 면의 개수를 각각 m, n, p라고 하고 다음 표에 수를 써넣어라. 무엇을 알수 있는가?

	m	n	p	$m-n+p$
바른4면체				
바른6면체				
바른8면체				
바른12면체				
바른20면체				

아무런 다면체에서나 정점, 모서리, 면의 개수 m, n, p사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$m-n+p=2$$

$m-n+p$를 다면체의 오일레르특성수라고 부른다.

문 제

1. 바른4면체, 바른6면체, 바른8면체, 바른12면체, 바른20면체의 면을 이루는 바른다각형의 한 아낙각은 각각 몇도이겠는가?
2. 두꺼운 종이에 모서리가 5cm인 바른6면체, 바른8면체의 펼친그림을 그려라. 이것으로 바른6면체, 바른8면체를 만들어라.

2. 각기둥과 각뿔

그림 9－34와 같이 다각형을 그것이 놓이는 평면과 수직인 직선 ℓ에 평행되게 일정한 거리만큼 평행이동하여보아라.

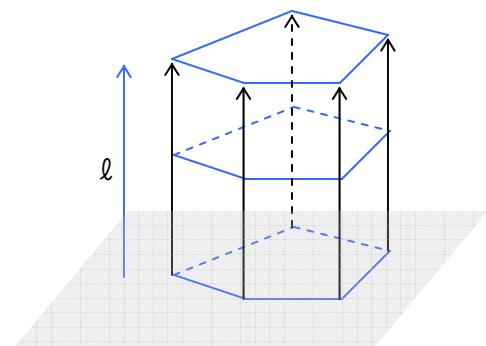
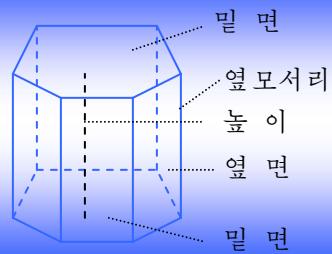
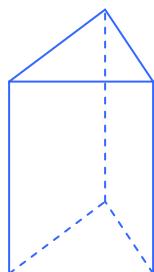



그림 9－34

각기둥과 그 요소들

두 면은 합동인 다각형이고 다른 면들은 평행4변형인 립체를 각기둥이라고 부른다. 각기둥에서 두 밑면사이의 거리를 각기둥의 높이라고 부른다.

밑면이 3각형, 4각형, …인 각기둥을 **3각기둥, 4각기둥,** …이라고 부른다. 밑면이 바른다각형인 각기둥을 **바른각기둥**이라고 부른다.

3각기둥

바른6각기둥

그림 9-35

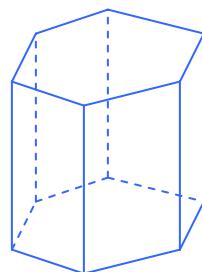
문 제

1. 각기둥은 밑면을 그에 수직인 직선 AA_1방향으로 AA_1만큼 평행이동할 때 얻어진다. 각기둥을 밑면에 평행인 평면으로 자르면 그 자름면은 밑면과 합동이라고 말할수 있는가?(그림 9-36)

그림 9-36

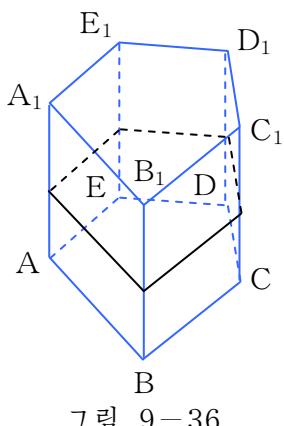
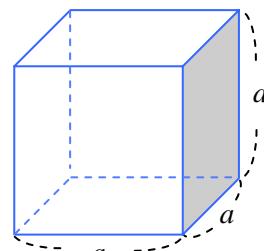



그림 9-37

2. 그림 9-37에서

1) 바른4각기둥은 직6면체라고 말할수 있는가?

2) 바른4각기둥의 옆면들은 직4각형이라고 말할수 있는가?

3) 바른4각기둥에서 옆모서리의 길이가 밑면의 변의 길이와 같으면 바른6면체가 된다고 말할수 있는가?

3. 밑면이 합동인 다각형이고 옆면들이 합동인 직4각형인 다면체는 어떤 도형인가?

알아보기 그림 9−38의 ㄱ)과 같은 다면체모양의 물체가 있다. 정점부분을 잘라내여 떼여놓은것이 ㄴ)이다. 이와 같이 다면체의 한 정점부분을 평면으로 자르면 옆면들은 어떤 다각형이며 밑면은 어떤 다각형인가?

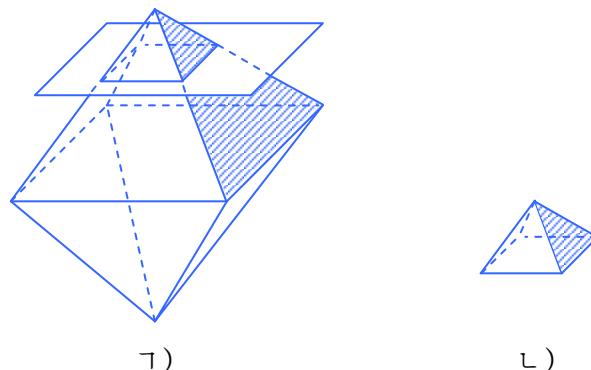



그림 9−38

각뿔과 그 요소

한 면은 다각형이고 다른 면들은 한 정점에서 사귀는 3각형들로 된 다면체를 각뿔이라고 부른다.

밑면이 3각형, 4각형, …인 각뿔을 **3각뿔, 4각뿔**, …이라고 부른다.

밑면이 바른다각형이고 옆면이 합동인 2등변3각형으로 된 각뿔을 **바른각뿔**이라고 부른다.

각뿔을 밑면에 평행인 평면으로 자르면 **자름면**이라고 부르는 면이 생긴다.

이때 자름면은 각뿔의 밑면의 줄인 도형이다.

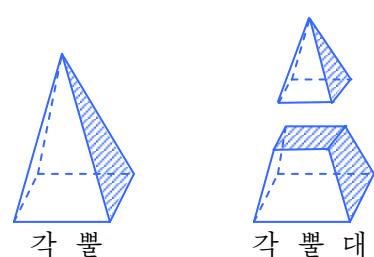
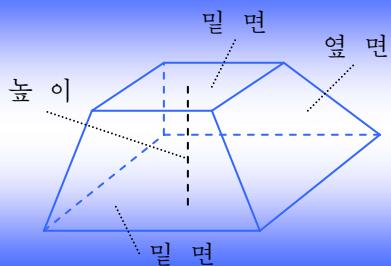



그림 9−39

각뿔에서 밑면에 평행인 평면으로 잘라서 정점이 있는 부분을 버린 나머지 부분을 각뿔대라고 부른다.

바른각뿔에서 얻어진 각뿔대를 바른 각뿔대라고 부른다.

문 제

1. 바른각뿔대의 밑면은 합동이겠는가?
2. 각뿔대, 바른각뿔대의 옆면은 어떤 4각형인가?

련 습 문 제

1. 밑면이 한 변이 3cm인 바른4각형이고 옆모서리가 4cm인 바른4각뿔이 있다. 이 바른4각뿔의 펼친그림을 그려라.
2. 펼친그림이 그림 9－40과 같은 각뿔은 바른각뿔인가?

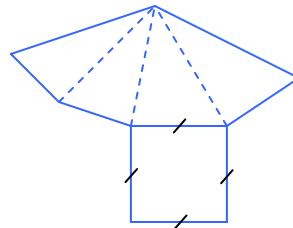
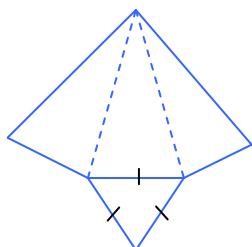



그림 9－40

3. 각뿔을 밑면에 평행인 평면으로 잘랐을 때 자름면이 모서리를 1:2의 비로 나누면 밑면과 자름면의 대응하는 한 변 AB와 A_1B_1의 비는 얼마인가?(그림 9－41)

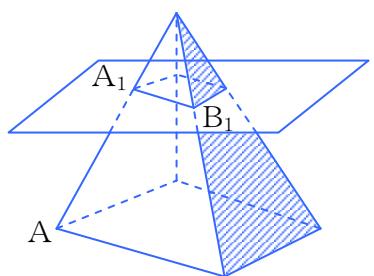



그림 9－41

제3절. 회전체

1. 원기둥과 원뿔

1. 그림 9－42의 ㄱ)과 같은 직4각형 ABCD를 ℓ을 축으로 하여 공간에서 한바퀴 돌려보아라.
2. 이때 생긴 도형을 ℓ을 지나는 평면으로, ℓ에 수직인 평면으로, ℓ에 수직이 아닌 평면으로 잘라보아라.(그림 9－42의 ㄷ))

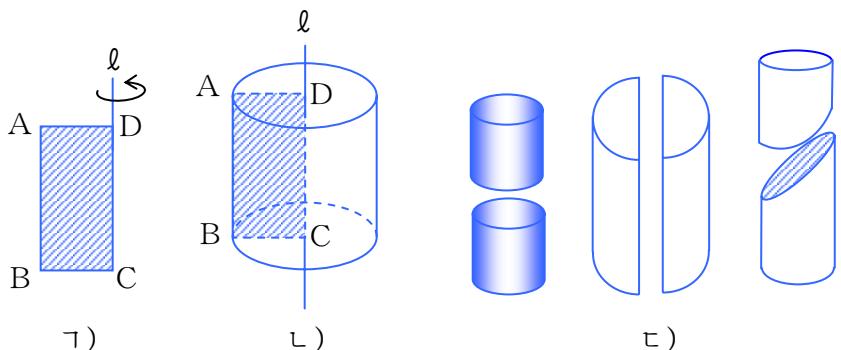



그림 9－42

원기둥과 그 요소들

직4각형의 한 변을 축으로 하여 그것을 한바퀴 돌릴 때 생기는 립체를 원기둥이라고 부른다. 원기둥의 두 밑면은 합동인 원이다.

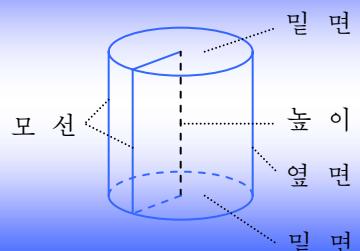
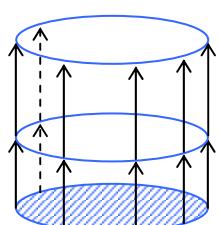
원기둥의 두 밑면사이의 거리를 높이라고 부른다. 원기둥에서 모선의 길이는 높이와 같다.

원기둥은 원을 그가 놓인 평면에 수직인 방향으로 일정한 거리만큼 평행이동하여 얻은 기둥이라고 말할수 있다.(그림 9－43)

그림 9－43

1. 그림 9－44의 ㄱ)과 같은 직3각형 ABC를 ℓ을 축으로 하여 공간에서 한바퀴 돌려보아라.

2. 이때 생긴 립체를 ℓ을 지나는 평면으로, 밑면을 지나지 않으면서 ℓ에 수직이 아닌 평면으로, ℓ에 수직인 평면으로 잘라보아라.(그림 9－44의 ㄷ)) 어떤 도형이 생기는가?

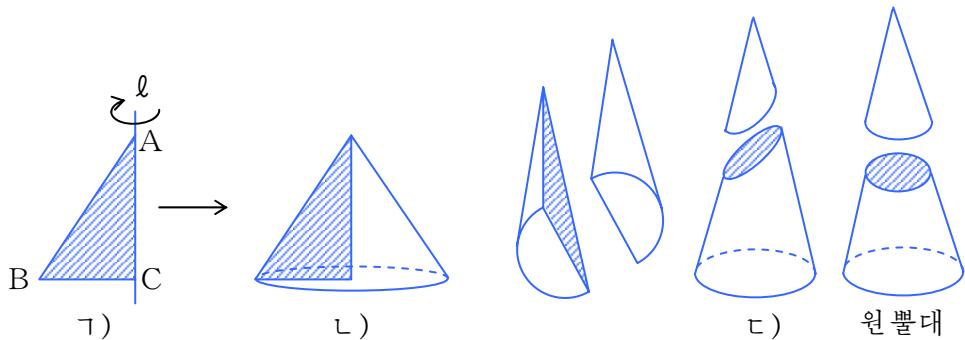



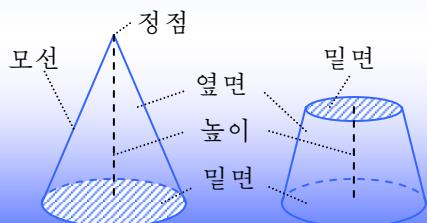
그림 9－44

원뿔과 원뿔대, 그 요소들

직3각형의 한 직각변을 축으로 하여 한바퀴 돌릴 때 생기는 립체를 원뿔이라고 부른다.

원뿔의 정점에서 밑면까지의 거리를 원뿔의 높이라고 부른다.

원뿔을 밑면에 평행인 평면으로 자를 때 생긴 밑부분의 립체를 원뿔대라고 부른다. 두 밑면사이의 거리를 원뿔대의 높이라고 부른다.

문제

1. 원기둥의 모든 모선들은 평행이겠는가?
2. 원뿔대에서 웃밑면은 아래밑면의 줄인 도형이라고 말할수 있는가?
3. 원뿔의 밑면의 반경이 3cm, 모선이 4cm일 때 펼친그림을 그려라.
4. 원뿔에서 밑면에 평행인 평면이 모선을 1:2로 나눌 때 생기는 원뿔대의 두 밑면의 면적의 비를 구하여라.

2. 구

1. 그림 9−45와 같은 반원을 ℓ을 축으로 하여 공간에서 한바퀴 돌려보아라.
2. 이때 생긴 도형을 O를 지나는 평면으로, O를 지나지 않는 평면으로 잘라보아라. 어떤 도형이 생기는가?

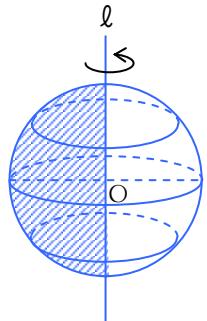



그림 9−45

반경이 R인 구에서 구면은 중심 O로부터의 거리가 R와 같은 점 M의 모임 즉 $\{M|OM=R\}$로 볼수 있다.

$\{M|OM\leq R\}$ … 구

$\{M|OM<R\}$ … 구의 아낙

$\{M|OM>R\}$ … 구의 바깥

구 O의 중심을 지나는 직선에 수직인 평면 α가 있다. 구 O를 OO_1의 화살방향으로 이동한다면 평면 α와 구 O의 자리관계는 어떤 경우들이 있는가?

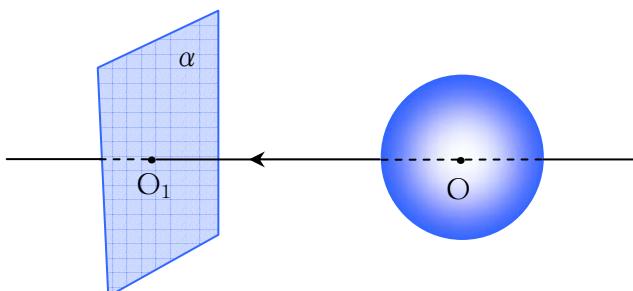
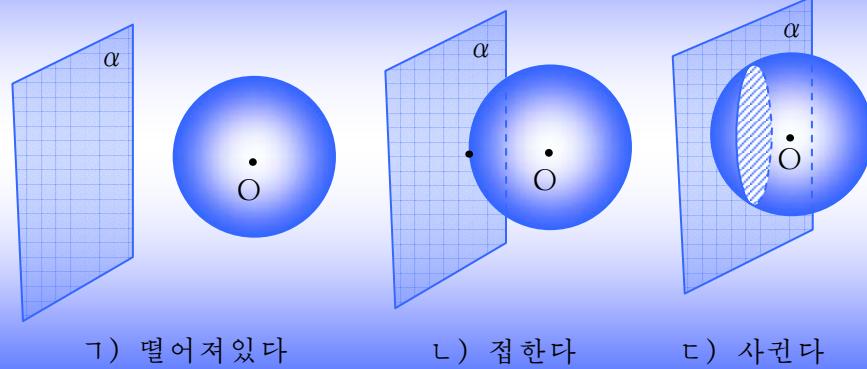
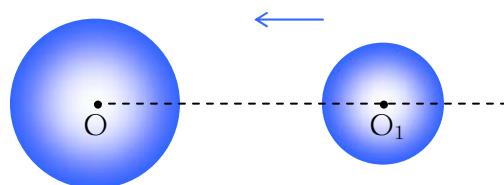
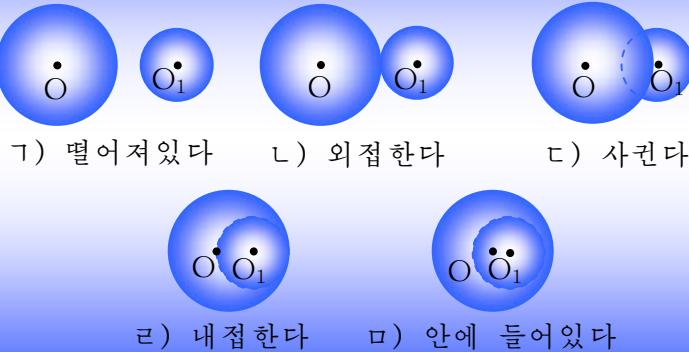



그림 9−46

구의 한 점에 접해있는 평면을 구의 **접평면**, 그 점을 **접점**이라고 부른다.

알아보기 반경이 다른 두개의 구 O와 O_1이 서로 떨어져있다. 그림 9－47에서와 같이 구 O_1을 화살방향으로 이동하여가면 이 두 구의 자리관계는 어떤 경우들이 있을수 있는가?

O O_1

그림 9－47

문 제

1. 반경이 r인 구 O와 평면 α가 다음과 같은 자리관계에 있을 때 구 O와 평면 α사이의 거리를 구하여라.
   1) 접하였다.　　　　　　　　2) 사귀였다.
   3) 떨어져있다.(구의 중심 O에서 평면 α까지의 거리는 ℓ이다.)
2. 반경이 각각 r, r_1인 두 구 O, O_1이 있다. 두 구의 자리관계에 따르는 d(O, O_1)(두 구의 중심사이의 거리), r, r_1사이의 관계를 말하여라.

련 습 문 제

1. 원뿔, 원뿔대, 구의 요소들을 비교하여라.
2. 한 변의 길이가 1cm인 바른6면체안에 직경 0.4cm의 구가 들어갈수 있겠는가? 또 직경 0.6cm의 구는 어떤가?(그림 9—48)
3. 그림 9—49와 같은 베아링이 있다. 베아링알의 반경을 구하여라.

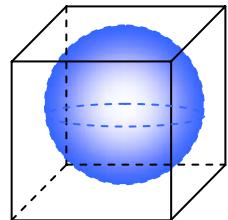



그림 9—48

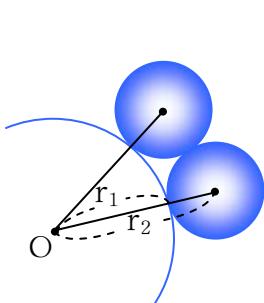



그림 9—49

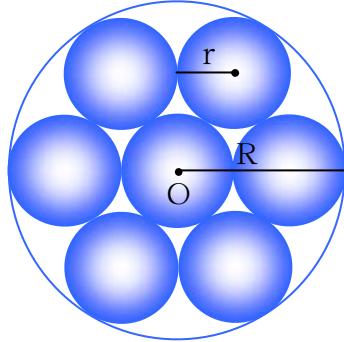



그림 9—50

4. 그림 9—50과 같이 자름면의 반경이 R인 원기둥에 꼭같은 7개의 베아링알들이 접하고있다. 이 알들의 반경 r를 구하여라.

제4절. 립체의 겉면적과 체적

1. 각기둥의 겉면적과 체적

알아보기 그림 9—51은 직6면체의 펼친그림이다.
1) 이 직6면체의 옆면적(모든 옆면의 면적의 합)을 구하여라.
2) 이 직6면체의 겉면적은 무엇과 같은가?

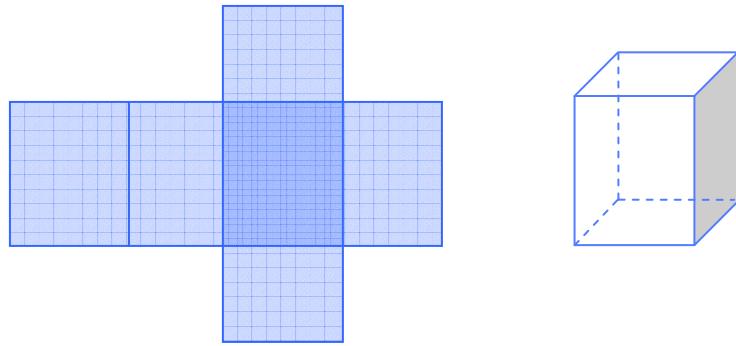



그림 9－51

각기둥의 옆면적을 구하려면 각기둥의 옆면의 펼친그림의 면적을 구하면 된다.

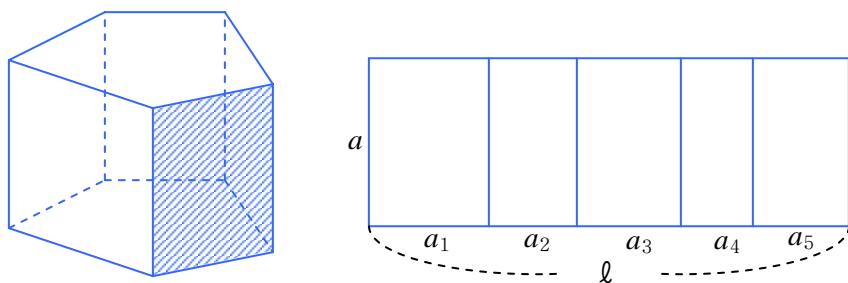



그림 9－52

$$S_{\text{옆}} = a\ell \ (\ell = a_1 + a_2 + \cdots + a_5)$$

각기둥의 겉면적은 각기둥의 옆면적과 두 밑면의 면적을 합하면 된다.

문 제

1. 다음과 같은 직6면체에서 $S_{옆}$, $S_{겉}$을 구하여라. (그림 9-53)

a	b	h
2.3cm	13.5cm	25cm
2.7cm	29cm	360mm
$\frac{7}{3}$cm	6.7cm	$1\frac{1}{2}$cm
52.7cm	$5\frac{5}{3}$dm	0.02km
$13\frac{3}{7}$mm	$20\frac{5}{6}$mm	$23\frac{7}{3}$mm

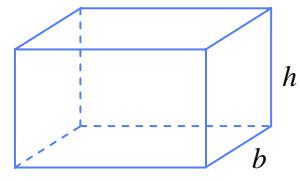



그림 9-53

2. 옆모서리의 길이가 2cm인 바른8각기둥이 있다. 밑면의 한 변의 길이가 1cm일 때 이 바른8각기둥의 옆면적을 구하여라.

3. 사영그림이 그림 9-54와 같은 도형이 있다. (단위는 cm) 이런 립체의 이름을 무엇이라고 부르는가? 이 도형의 겉면적 $S_{겉}$을 구하여라.

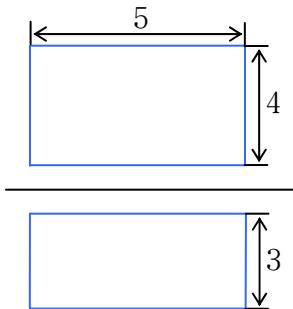
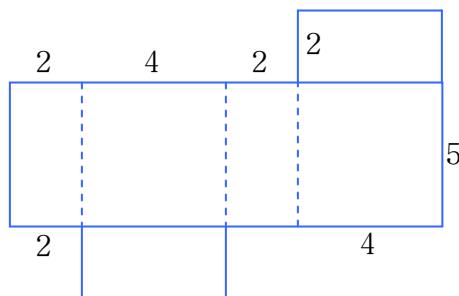



그림 9-54 그림 9-55

4. 립체의 겉면을 펼친것이 그림 9-55와 같다. (단위는 cm) 이런 립체의 이름을 무엇이라고 부르는가? 이 립체의 모형을 만들고 겉면적을 구하여라.

1. 가로 5cm, 세로 4cm, 높이 2cm인 직6면체를 그림 9-56과 같이 한 모서리가 1cm인 바른6면체들로 나눌 때 바른6면체가 몇개나 생기는가?
2. 이 직6면체의 체적은 몇cm^3인가?

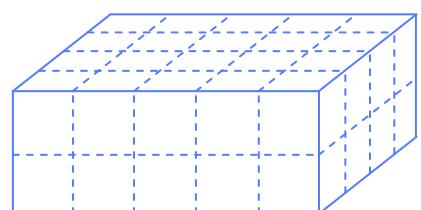
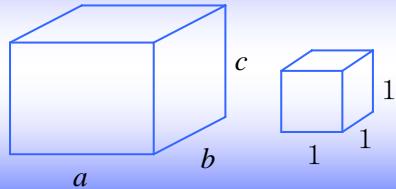



그림 9-56

직6면체의 체적

가로, 세로, 높이가 각각 a, b, c인 직6면체의 체적을 V로 표시하면

$$V=abc$$

문 제

1. 가로가 3.9cm, 세로가 4.2cm, 높이가 4.1cm인 직6면체의 체적을 구하여라.
2. 가로가 0.7m, 세로가 450cm, 높이가 6.5dm인 직6면체가 있다.
   1) 체적을 구하여라.(단위가 cm^3가 되게)
   2) 단위가 m^3가 되게 고쳐라.
   3) 단위가 dm^3가 되게 고쳐라.
3. 직경이 30cm이고 길이가 4m인 통나무에서 나올수 있는 가장 큰 바른4각기둥의 체적을 구하여라.(그림 9－57)

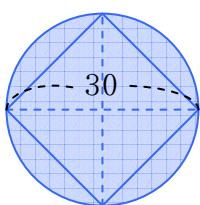



그림 9－57

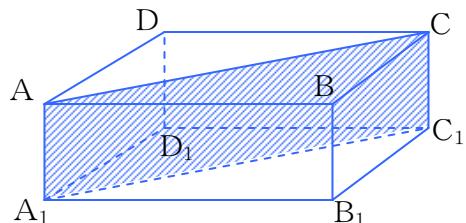



그림 9－58

4. 그림 9－58과 같은 직6면체가 있다. 모서리 AA_1, CC_1을 지나는 평면으로 직6면체를 잘랐을 때 생기는 두 3각기둥의 체적은 같겠는가? 이 3각기둥 하나의 체적은 직6면체체적의 몇분의 몇인가?

그림 9－59와 같은 얇은 종이장을 꼭같게 오려 같은 높이로 쌓아놓았다. 이 립체들의 체적이 같다.

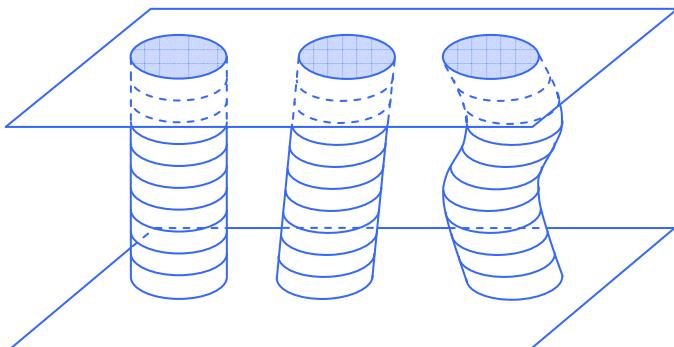
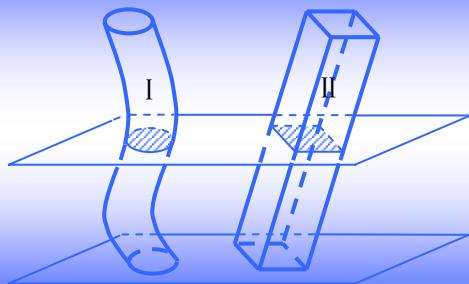



그림 9－59

까왈리레리원리(체적의 원리)

두 립체 Ⅰ과 Ⅱ를 한 평면에 올려놓고 그 평면에 평행인 평면으로 자르자. 이때 두 자름면의 면적이 매번 같으면 이 두 립체의 체적은 같다.

례 밑면의 면적이 S이고 높이가 h인 각기둥의 체적은 $V=S\cdot h$라는것을 알아보자.

밑면의 면적이 S이고 높이가 h인 직6면체와 각기둥을 한 평면에 올려놓자.(그림 9－60)

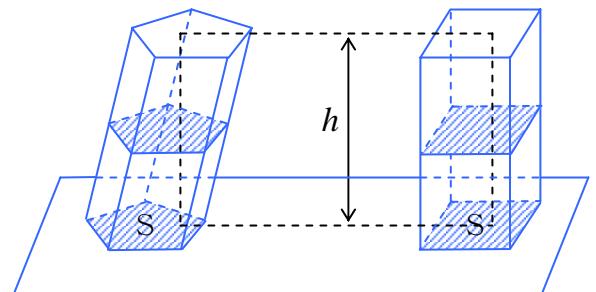
다음에 그 평면에 평행인 평면으로 직6면체와 각기둥을 함께 자르면 그 자름면의 면적들은 늘 S와 같다.

그림 9－60

그러므로 체적의 원리에 의하여 직6면체와 각기둥의 체적은 같다.

한편 직6면체의 체적은 $S\cdot h$이다. 따라서 각기둥의 체적을 V라고 하면

$$V=S\cdot h$$

문 제

1. 밑면의 면적이 6cm^2, 높이가 3cm이면서 옆모서리가 밑면에 수직이 아닌 각기둥의 체적은 얼마인가?

2. 3각기둥의 사영이 그림 9-61과 같다.(단위는 cm) 체적을 구하여라.

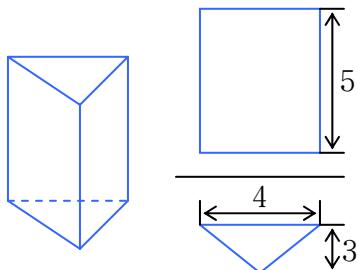



그림 9-61

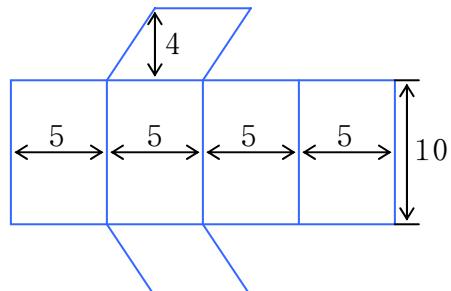



그림 9-62

3. 그림 9-62와 같은 펼친그림이 있다.(단위는 cm)
   1) 이 각기둥의 밑면은 무슨 4각형이겠는가?
   2) 각기둥의 겉면적을 구하여라. 밑면이 바른4각형이든 평행4변형이든 옆면적은 같다고 말할수 있는가?
   3) 각기둥의 체적을 구하여라.

4. 어느 학교의 수영장의 웃면은 가로가 50m, 세로가 25m인 직4각형이고 바닥은 경사지게 되여있다.(그림 9-63)

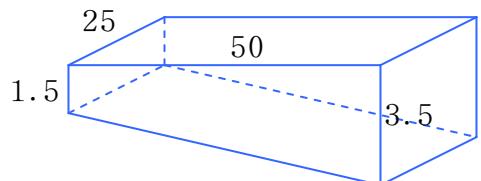



그림 9-63

   1) 수영장은 어느 면을 밑면으로 할 때 각기둥모양으로 볼수 있는가?
   2) 이 수영장에 가득 들어있는 물의 량(체적)을 구하여라.

5. 그림 9-64와 같이 한 모서리의 길이가 3cm인 바른6면체의 밑면에 한 모서리가 1cm이고 높이가 3cm인 바른4각기둥모양의 구멍이 뚫려있다. 이 립체의 체적을 구하여라.

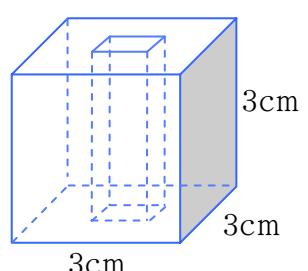



그림 9-64

2. 원기둥의 겉면적과 체적

알아보기 그림 9－65의 원기둥 ㄱ)을 ㄴ)과 같이 평면에 펼쳐놓았다.

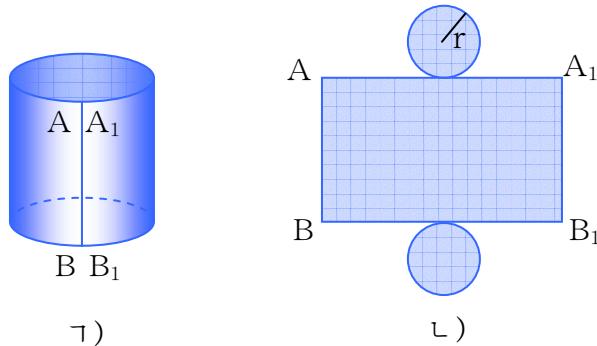



그림 9－65

1) 이때 옆면의 펼친그림 ABB_1A_1은 무슨 4각형인가?
2) 밑면의 반경이 r일 때 변 AA_1의 길이는 얼마이겠는가?
3) 원기둥의 높이가 h일 때 옆면의 면적 $S_{옆}$은 얼마이겠는가?
4) 원기둥의 겉면적 $S_{겉}$은 얼마이겠는가?

문 제

1. 밑면의 반경이 2cm, 모선이 5cm인 원기둥이 있다.
   1) 밑면의 둘레의 길이를 구하여라.
   2) 옆면의 펼친그림에서 가로와 세로는 얼마인가?
   3) 옆면적과 겉면적을 구하여라.

2. 다음과 같은 경우에 원기둥의 $S_{옆}$과 $S_{겉}$을 구하여라.

1) r＝4cm, h＝10cm　　2) r＝78mm, h＝140mm

3) r＝23.4cm, h＝3.3dm　　4) r＝25mm, h＝3500mm

3. 원기둥의 옆면의 펼친그림에서 가로는 37.68cm, 세로는 3cm이다.

1) 원기둥의 밑면의 반경을 구하여라.

2) 원기둥의 $S_{옆}$과 $S_{겉}$을 구하여라.

4. 다음것을 구하여라.

1) $S_{옆}$＝2600cm^2, h＝102cm, r＝?

2) $S_{겉}$＝4.27dm^2, r＝42mm, h＝?

3) r＝21.4cm, h＝12.3cm, $S_{겉}$＝?

5. 밑면의 반경이 3m, 높이가 7.5m인 철판으로 만든 원기둥모양의 통이 있다. 이 통보다 반경이 50cm, 높이가 70cm 큰 새 통을 만들려고 한다. 새 통을 만드는데 드는 철판은 처음 통보다 몇% 더 있어야 하겠는가?

해보기 한 평면에 밑면의 면적이 S, 높이가 h인 직4각기둥과 원기둥을 놓고 밑면에 평행인 평면으로 자르면 자름면의 면적은 늘 S와 같다는 것을 써서 원기둥의 체적공식을 구해보아라.(그림 9－66)

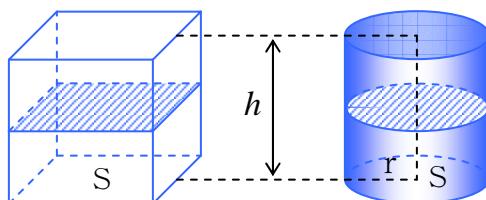



그림 9－66

원기둥의 체적

밑면의 반경이 r, 높이가 h인 원기둥의 체적 V는

$$V=\pi r^2 h$$

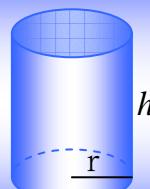
문 제

1. 밑면의 반경이 10cm이고 높이가 20cm인 원기둥모양의 통의 체적은 얼마이겠는가?
2. 그림 9-67과 같은 원기둥의 체적을 구하여라.(단위는 cm)

그림 9-67

3. 원기둥의 밑면의 면적은 $5.6cm^2$이고 체적은 $16.8cm^3$이다. 원기둥의 높이를 구하여라.
4. 그림 9-68과 같이 구멍이 뚫린 원기둥모양의 립체가 있다. 밑면의 바깥원의 반경은 10cm, 아낙원의 반경은 5cm, 높이는 25cm이다. 이 립체의 체적을 구하여라.

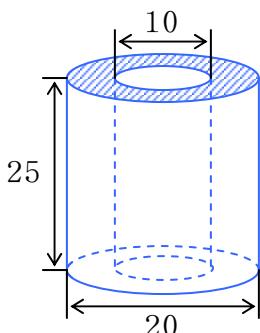



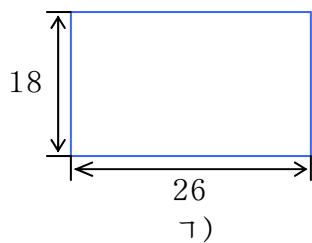
그림 9-68 그림 9-69

5. 그림 9-69와 같이 가로와 세로가 26cm, 18cm인 직4각형모양의 석도금판이 2개 있다. 이것을 각각 감아 높이가 26cm, 18cm인 두 원기둥을 만들었다. 두 원기둥의 체적을 구하고 그것을 비교하여라.
6. 바깥원의 직경이 120mm이고 두께가 10mm인 수도관으로 1초동안에 물이 3cm씩 흘러간다면 이 수도관으로 1시간동안에 얼마만한 물이 흐르겠는가?
7. 그림 9-70과 같은 기계부분품이 있다. 이 기계부분품의 겉면의 면적과 체적을 구하여라. (단위는 cm)

그림 9-70

3. 각뿔의 겉면적과 체적

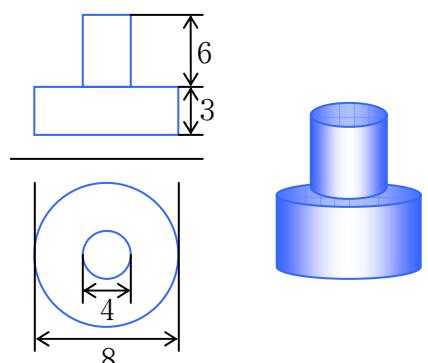



그림 9−71은 밑면의 한 변의 길이가 a, 옆면의 높이가 h인 바른4각뿔이다.

1) 옆면적 $S_{옆}$은 얼마인가?

2) 겉면적 $S_{겉}$은 무엇과 같은가?

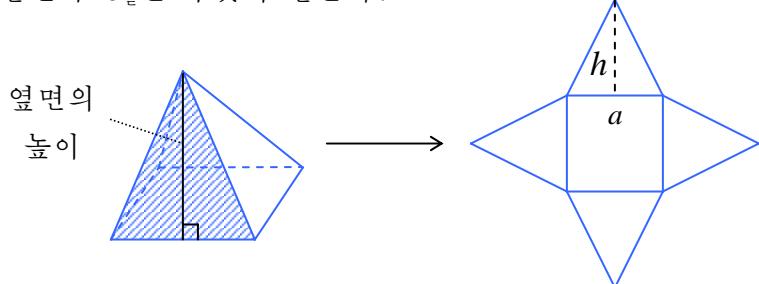



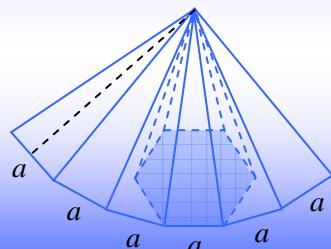
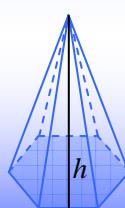
그림 9−71

바른각뿔의 옆면적

밑면의 한 변의 길이가 a이고 옆면의 높이가 h인 바른n각뿔의 옆면적 $S_{옆}$은

$$S_{옆}=\frac{1}{2}ahn$$

바른4각뿔의 겉면적 $S_{겉}$은

$$S_{겉}=2a\left(h+\frac{a}{2}\right)$$

문 제

1. 밑면의 한 변이 6cm이고 옆모서리가 5cm인 바른3각뿔, 바른4각뿔이 있다.

   1) 펼친그림을 $\frac{1}{2}$로 줄여서 그려라.　　2) 줄인도형의 옆면적을 구하여라.

2. 밑면의 한 변의 길이 a와 옆면의 높이 h가 다음과 같을 때 바른3각뿔, 바른4각뿔, 바른6각뿔의 옆면적을 구하여라.

a	h
23cm	25cm
$2\frac{1}{3}$cm	$70\frac{4}{5}$mm
21.7mm	0.12m

그림 9－72와 같이 밑면과 높이가 각각 서로 같은 3각기둥과 3각뿔모양의 그릇이 있다.

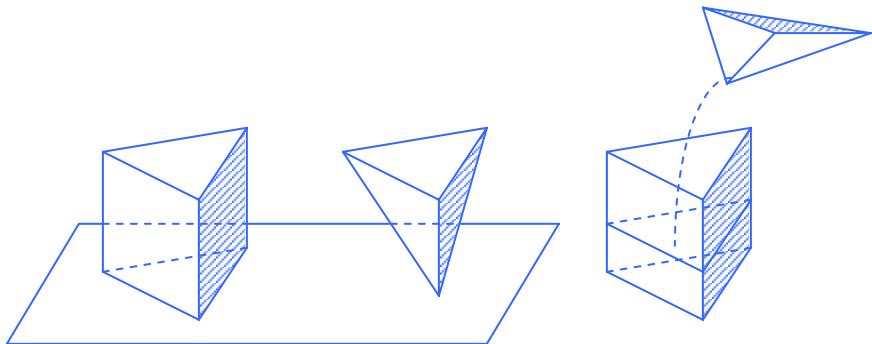



그림 9－72

1. 3각뿔모양의 그릇에 물을 채워 3각기둥모양의 그릇에 부어보아라.
2. 이렇게 세번을 부으면 3각기둥모양의 그릇에 물이 꽉 찰수 있는가?

각뿔의 체적

밑면적 S, 높이 h인 각뿔의 체적 V는

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

문 제

1. 밑면의 한 변이 8cm이고 높이가 10cm인 바른3각뿔, 바른4각뿔이 있다. 그 바른각뿔들의 체적을 구하여라.
2. 밑면의 한 변의 길이 a와 옆면의 높이 h가 표와 같을 때 바른3각뿔, 바른4각뿔, 바른6각뿔의 체적을 구하여라.

a	h
23cm	25cm
$2\frac{1}{3}$cm	$70\frac{4}{5}$mm
21.7mm	9.12m

상식

4천년전에 계산한 바른각뿔의 체적

B.C.2천년경에 바빌로니아사람들은 바른각뿔과 바른각뿔대의 체적을 계산할줄 알았다고 한다. 그들은 이뿐만아니라 변과 높이에 의한 3각형의 면적계산, 반경에 의한 원의 면적계산, 피다고라스의 공식도 알고있었다.

4. 원뿔의 겉면적과 체적

모선의 길이가 7cm, 밑면의 반경이 3cm인 원뿔과 그 옆면의 펼친그림이 있다.(그림 9-73)

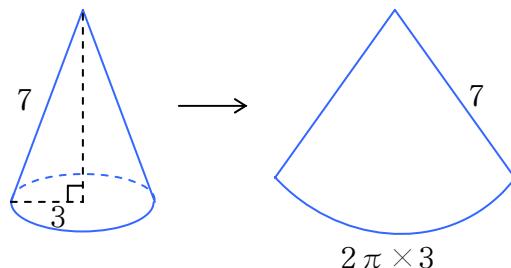



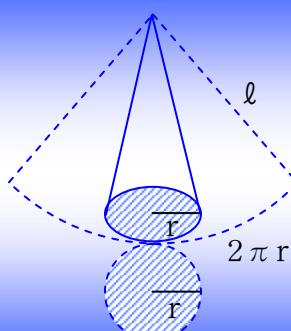
그림 9-73

1. 옆면의 펼친그림은 어떤 도형인가?
2. 원뿔의 옆면적을 구하여라.
3. 원뿔의 겉면적은 무엇과 같은가?

원뿔의 겉면적

반경이 r이고 모선의 길이가 ℓ인 원뿔의 옆면적 $S_{\text{옆}}$과 겉면적 $S_{\text{겉}}$은

$$S_{\text{옆}} = \frac{\ell \times 2\pi r}{2} = \pi r \ell$$

$$S_{\text{겉}} = \pi r \ell + \pi r^2 = \pi r(\ell + r)$$

문 제

1. 다음과 같은 원뿔에서 $S_{옆}$, $S_{겉}$을 구하여라.(그림 9-74)

r	ℓ
13.3cm	21cm
2.5dm	27cm
$40\frac{1}{3}$cm	51.3cm
$2\frac{7}{3}$dm	$20\frac{8}{3}$mm

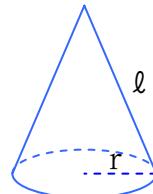



그림 9-74

2. 두 직각변이 3cm, 4cm인 직3각형을 길이가 4cm인 직각변을 축으로 돌렸을 때 생기는 원뿔의 옆면적, 겉면적을 구하여라. 또 3cm인 직각변을 축으로 돌렸을 때 생기는 원뿔의 옆면적, 겉면적을 구하여라.
3. 그림 9-75와 같은 원뿔이 있다.
   1) 모선의 길이를 구하여라.
   2) 옆면적과 겉면적을 구하여라.

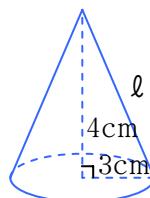



그림 9-75

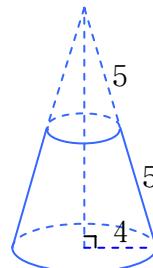



그림 9-76

4. 그림 9-76과 같은 원뿔대의 옆면적, 겉면적을 구하여라.(단위는 cm)
5. 원뿔의 옆면을 펼쳐서 부채형을 만들었다. 부채형의 반경은 8cm, 활등의 길이는 37.8cm이다.
   1) 원뿔의 밑면의 반경을 구하여라.
   2) 원뿔의 옆면적과 겉면적을 구하여라.

해보기 한 평면에 밑면의 면적이 S, 높이가 h인 각뿔과 원뿔을 올려놓고 밑면에 평행인 평면으로 자르면 자름면의 면적은 늘 같다. 이것을 리용하여 원뿔의 체적공식을 구해보아라.(그림 9-77)

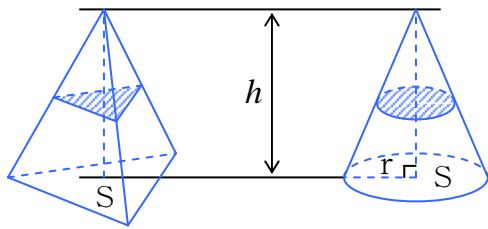
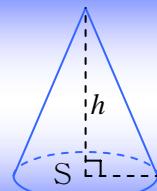



그림 9－77

원뿔의 체적

밑면적 S, 높이 h인 원뿔의 체적 V는

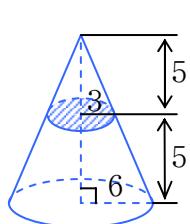
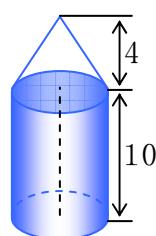
$$V=\frac{1}{3}Sh$$

문 제

1. 다음과 같은 원뿔에서 체적을 구하여라. 여기서 r, h는 각각 원뿔의 밑면의 반경, 높이이다.

r	h	r	h
13.3cm	21cm	2.3cm	2.38cm
2.5dm	27cm	0.25dm	2.7cm
$\frac{11}{3}$cm	6.9cm	$\frac{23}{3}$cm	12.8cm

2. 높이가 6cm, 체적이 25.12cm^{3}인 원뿔의 밑면적, 반경을 구하여라.
3. 1) 그림 9－78의 ㄱ)과 같은 원뿔대가 있다.(단위는 cm) 이 원뿔대의 체적을 구하여라.
   2) 그림 9－78의 ㄴ)과 같은 립체가 있다.(단위는 cm) 밑면의 반경이 20cm일 때 이 립체의 체적을 구하여라.

그림 9－78

5. 구의 겉면적과 체적

반경이 r인 구와 밑면의 반경이 r인 원기둥모양의 그릇이 있다. 물을 가득채운 그릇에 반경이 r인 구를 넣자. 이때 넘어나는 물을 밑면의 반경이 r인 원기둥모양의 그릇에 넣어라.(그림 9−79)

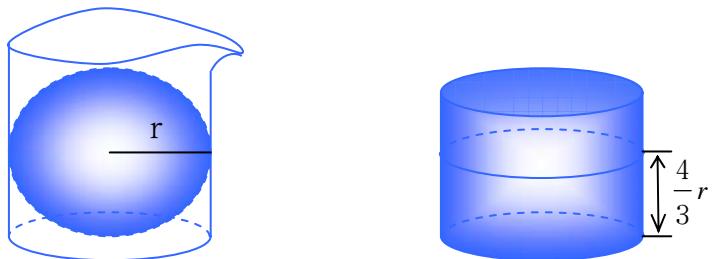



그림 9−79

1. 원기둥에 담긴 물의 높이를 알아보아라.
2. 원기둥에 담긴 물의 체적을 가지고 구의 체적을 구해보아라.

구의 체적

반경이 r인 구의 체적 V는 밑면의 반경이 r이고 높이가 $\frac{4}{3}$ r인 원기둥의 체적과 같다.

$$V=\pi r^2\times\frac{4}{3}r=\frac{4}{3}\pi r^3$$

문 제

1. 반경이 3r인 구의 체적은 반경이 r인 구의 체적의 몇배인가?
2. 지구의 반경은 6 378km이다. 지구의 체적을 구하여라.
3. 그림 9−80과 같이 원기둥의 량끝에 반구들이 붙어있다. 이 립체의 체적을 구하여라.(단위는 cm)

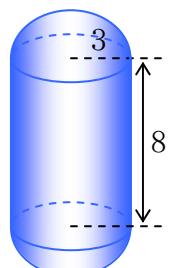



그림 9−80

찾기 구면을 그림 9－81과 같이 잘게 나누면 구는 작은 각뿔들을 모아서 만든것으로 볼수 있다.

다음 사실을 따져보고 구의 겉면적공식을 찾아라.

1. 작은 각뿔의 높이는 구의 반경 r와 같다고 볼수 있는가?
2. 작은 각뿔의 밑면들의 합은 얼마로 볼수 있는가?
3. 구의 체적

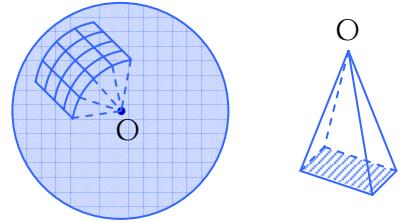



그림 9－81

$$V = \text{작은 각뿔들의 체적의 합}$$
$$= \frac{1}{3} r \times (\text{작은 각뿔들의 밑면의 면적의 합})$$
$$= \frac{1}{3} r \times (\text{구면의 면적}) = \frac{1}{3} rS$$

로 볼수 있는가?

구의 겉면적

반경이 r인 구면의 면적 S는

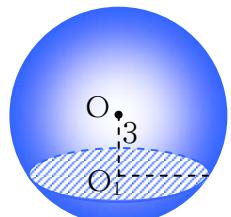
$$S = 4\pi r^2$$

문 제

1. 1) 반경이 1m인 기구(큰 고무풍선)의 겉면적은 얼마인가?
   2) 구면의 면적은 그 구의 큰원의 면적의 몇배인가?
2. 반경이 5cm인 구의 중심에서 3cm 떨어진 자름면의 면적을 구하여라.(그림 9－82)
3. 반경이 2r인 구의 겉면적은 반경이 r인 구의 겉면적의 몇배인가?

그림 9－82

4. 지구의 반경은 6 378km이다. 지구겉면의 면적은 얼마인가?

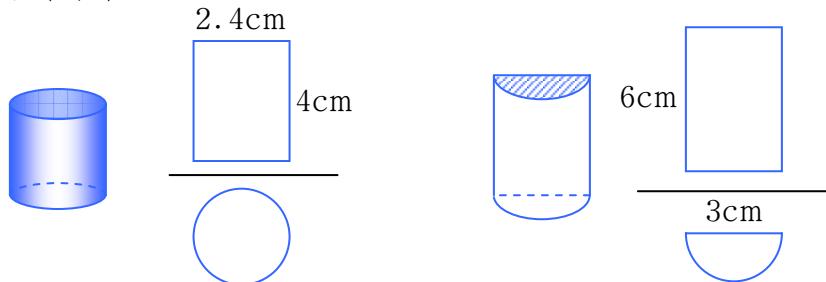
련 습 문 제

1. 각기둥과 원기둥의 요소들을 비교하여라.
2. 밑면이 한 변의 길이가 a이고 옆면의 높이가 h인 바른n각기둥의 옆면적공식을 만들어보아라. 그리고 원기둥의 옆면적공식과 비교하여라.

3. 그림 9—83과 같은 원기둥에서

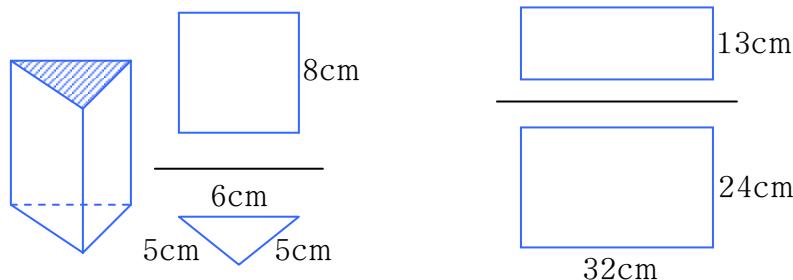
1) 밑면의 반경과 모선의 길이를 구하여라.

2) 옆면적과 겉면적을 구하여라.

3) 체적을 구하여라.

그림 9—83　　　　그림 9—84

4. 그림 9—84와 같은 립체의 옆면적, 체적을 구하여라.

5. 그림 9—85와 같은 3각기둥의 옆면적, 체적을 구하여라.

그림 9—85　　　　그림 9—86

6. 그림 9—86과 같은 직6면체에서

1) 밑면의 둘레를 구하여라.

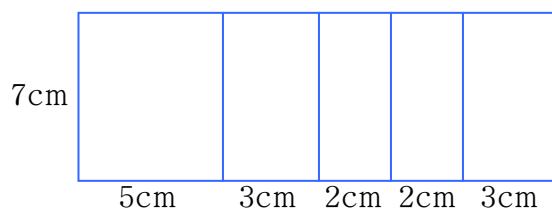
2) 옆면적과 겉면적을 구하여라.

3) 체적을 구하여라.

7. 옆면의 펼친그림이 그림 9—87과 같은 각기둥이 있다.

1) 옆면적을 구하여라.

2) 그림과 같은 펼친그림을 가지는 각기둥은 한가지로 정해진다고 말할수 있는가? 그림과 같은 펼친그림으로 각기둥의 겉면적, 체적을 구할수 있는가?

그림 9—87

8. 밑면의 한 변이 5cm이고 옆면의 높이가 8cm인 바른4각뿔이 있다. 이 바른4각뿔의 겉면적을 구하여라.

9. 원뿔의 옆면의 펼친그림이 반경이 3cm, 중심각이 120°인 부채형으로 되여있다. 이 원뿔의 겉면적을 구하여라.

10. 그림 9-88과 같은 3각뿔에서 ∠ASB=∠BSC=∠CSA=90°이고 SA=SB=SC=4cm이다.

1) 옆면적을 구하여라.

2) 옆모서리 SC는 옆면 SAB에 수직이겠는가?

그림 9-88

11. 그림 9-89에서와 같이 밑면의 반경이 6cm, 모선이 10cm인 원뿔을 밑면에 평행인 평면으로 잘랐다. 이때 생긴 원뿔대의 옆면적과 겉면적을 구하여라.(단위는 cm)

그림 9-89

12. 원뿔의 펼친그림이 반경이 a, 중심각이 90°인 부채형으로 되여있다. 이 도형을 $\frac{3}{4}$으로 줄인 부채형으로 원뿔을 만들었다. 이 원뿔의 옆면적을 구하여라.

13. 그림 9-90과 같이 원기둥안에 구와 원뿔이 접하고있다. 이 세 도형의 겉면적, 체적을 구하고 비교하여라.

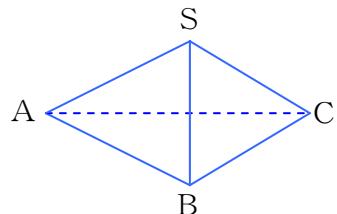
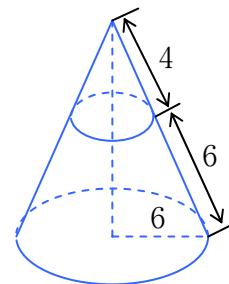
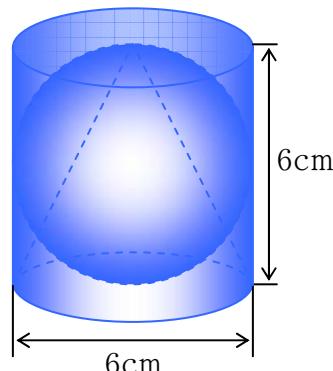



그림 9-90

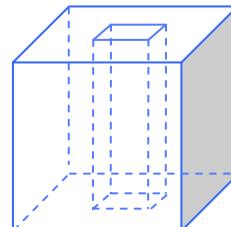



그림 9-91

14. 1) 그림 9-91과 같이 한 모서리가 4dm인 바른6면체에 밑면의 한 변이 2dm인 바른4각기둥모양의 구멍이 뚫어져있다. 이 립체의 체적은 얼마이겠는가?

2) 만일 반경이 1dm인 원기둥모양의 구멍이 뚫어졌다면 이 립체의 체적은 얼마이겠는가?

15. 밑면의 반경이 9cm, 길이가 1m인 원기둥모양의 철덩어리를 녹여 반경이 5cm인 구를 만들면 몇개나 만들수 있겠는가?

16. 반경이 r인 구의 중심을 지나는 서로 수직인 두 평면으로 구를 잘랐다. 이때 구는 꼭같은 4개의 부분으로 나누인다. 이 한쪼각의 체적과 밑면의 반경과 높이가 각각 r인 원기둥, 원뿔의 체적과 비교하여라.

1. 반경이 r인 구면의 겉면적공식 $S=4\pi r^2$을 알 때 구의 체적공식을 찾아내여라.
2. 직6면체, 바른6면체, 평행6면체, 각뿔, 원뿔, 각뿔대, 원뿔대에서 높이의 가운데점을 지나며 밑면에 평행인 면인 중간면을 생각하자.

   이제 이 도형들의 아래밑면적을 S_1, 웃밑면적을 S_2, 중간면의 면적을 S_0, 높이를 H로 표시하면 이 도형들의 체적 V가 다음과 같이 표시되는가를 알아보아라.

$$V=\frac{1}{6}H(S_1+4S_0+S_2)$$ (씸프슨의 만능체적공식)

복 습 문 제

1. 그림 9－92와 같은 직6면체에서
   1) 평행인 직선들
   2) 사귀는 직선들
   3) 어기는 직선들
   4) 평행인 평면들
   5) 수직인 평면들을 찾아보아라.

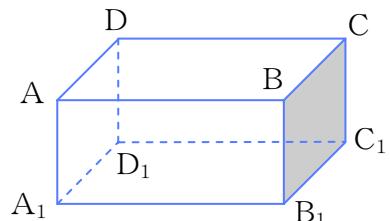



그림 9－92

2. 그림 9－92와 같은 직6면체에서
   1) 두 정점을 맺는 선분은 몇개인가?
   2) 한 면에 놓이지 않는 두 정점을 맺는 선분을 다면체의 대각선이라고 부른다. 대각선은 모두 몇개인가?
3. 걸그림대를 그림 9－93과 같이 만들려고 한다. 대 MN이 교실바닥에 수직되게 하려면 MN이 AB, CD와 각각 어떤 각을 이루게 하면 되겠는가?

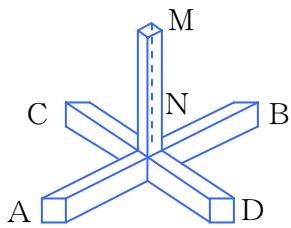



그림 9－93

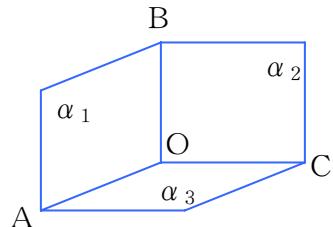



그림 9－94

4. 그림 9－94에서 BO⊥AO, BO⊥CO이다. 이때 $\alpha_1 \perp \alpha_3$, $\alpha_2 \perp \alpha_3$이라고 말할 수 있는가?

5. 바른8면체, 바른12면체에서 대각선의 수를 구하여라.

6. 다음 □에 알맞는것을 써넣어라.

   1) 두 면이 서로 합동인 다각형이고 나머지면들은 □인 다면체를 각기둥이라고 부른다.

   2) 바른각기둥이란 밑면이 □인 각기둥을 말한다.

   3) 바른각뿔의 밑면은 □이고 옆면들은 □인 2등변3각형이다.

   4) 바른각뿔대의 옆면들은 □인 □이다.

7. 그림 9－95의 ㄱ)와 같은 도형 F를 축 ℓ주위로 돌렸을 때 생기는 회전체는 어떤 모양을 하고있는가? 그 도형들을 그림 ㄴ)에서 찾아보아라.

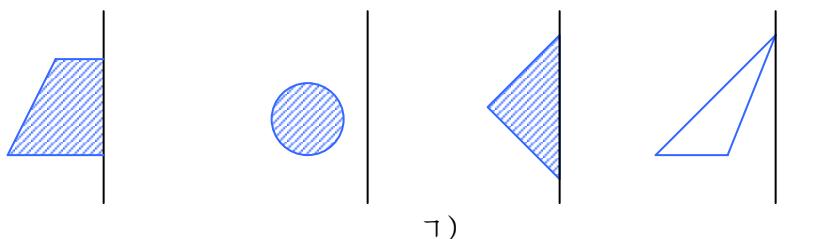
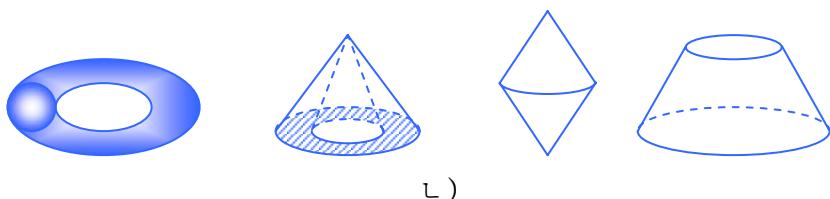



그림 9－95

8. 직6면체의 가로, 세로, 높이가 각각 7cm, 3*a*cm, 5*a*cm일 때 다음의 □에 알맞는 식을 써넣어라.

1) 겉면적 S=□cm^2　　　　2) 체적 V=□cm^3

9. 그림 9-96과 같은 블로크가 있다.(단위는 cm) 블로크 한개의 체적을 구하여라.

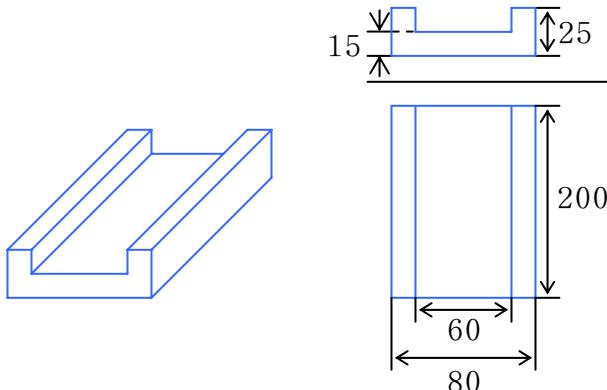



그림 9-96

10. 원기둥의 밑면의 반경 r와 높이 *h*가 다음과 같을 때 겉면적과 체적을 구하여라.

r	*h*	r	*h*
2.7cm	3.4cm	$26\frac{1}{3}$dm	0.13m
2.6cm	21.7cm	0.27dm	28mm

11. 그림 9-97과 같이 가로, 세로, 높이가 각각 7cm, 7cm, 21cm인 각기둥에 밑면의 반경이 2cm인 원기둥모양의 구멍이 뚫어졌다. 이 립체의 겉면적과 체적을 구하여라.

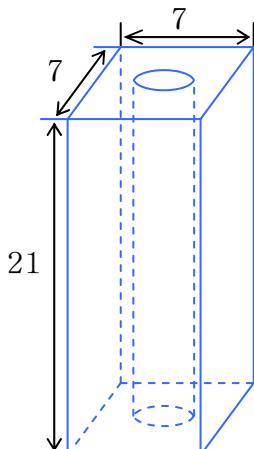



그림 9-97

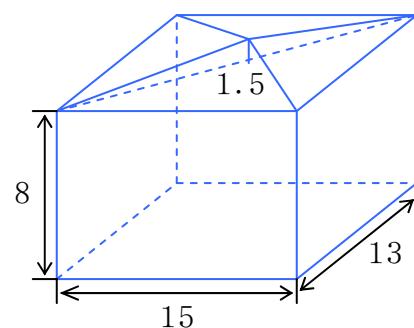
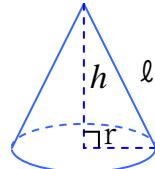



그림 9-98

12. 밑면의 가로와 세로가 각각 15cm, 13cm이고 높이가 8cm인 각기둥에 밑면은 같고 높이가 1.5cm인 각뿔이 붙어있는 립체가 있다. 이 립체의 체적, 겉면적을 구하여라.(그림 9−98)

13. 그림 9−99와 같은 원뿔이 있다. 그림을 보고 □에 알맞는 식을 써넣어라.

1) 원뿔의 옆면적은

$$S_{옆}=2\pi r\times\square\times\frac{1}{\square}=\pi r \ell$$

2) 원뿔의 체적은

$$V=\pi r^2\times\square\times\frac{1}{\square}=\frac{1}{3}\pi\square h$$

그림 9−99

14. 그림 9−100과 같은 립체의 체적을 구하여라.

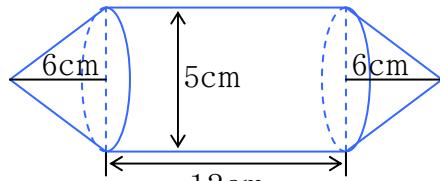
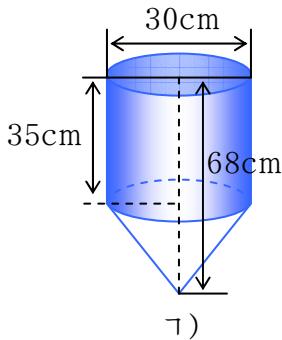



그림 9−100

15. 원기둥이나 원뿔의 겉면은 평면에 펼쳐놓을수 있다. 구의 겉면이나 그 한 부분을 그대로 평면에 펼쳐놓을수 있겠는가? 비닐공의 한쪼각을 가지고 실험해보아라.

16. 그림 9−101과 같이 원기둥에 반구가 붙어있는 립체가 있다. 이 립체의 겉면적과 체적을 구하여라.(단위는 cm)

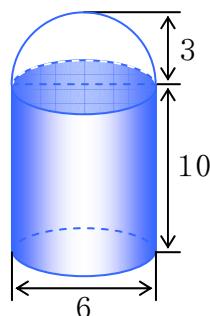
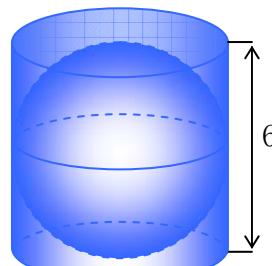



그림 9−101 그림 9−102

17. 그림 9－102와 같이 원기둥안에 반경이 3cm인 구가 들어있다.(접하였다.) 이때 원기둥의 옆면적과 구의 겉면적을 비교하여라.

18. 그림 9－103과 같이 높이가 2.5cm인 통들의 옆면적, 체적들을 구하여라.

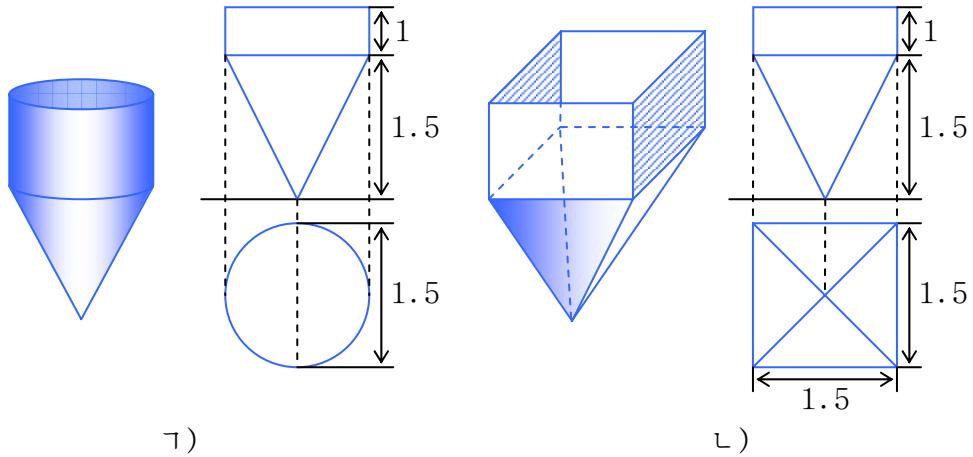
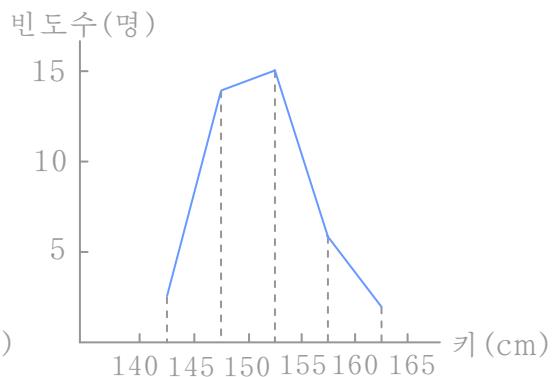
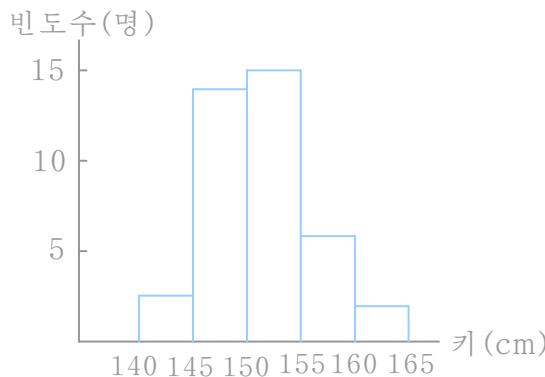
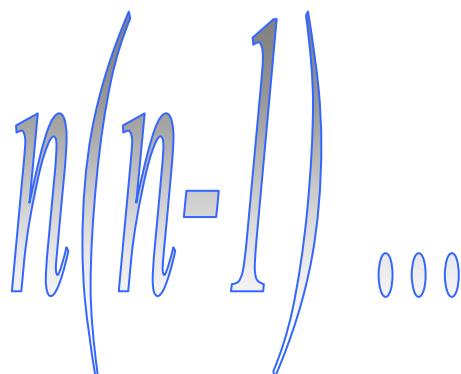
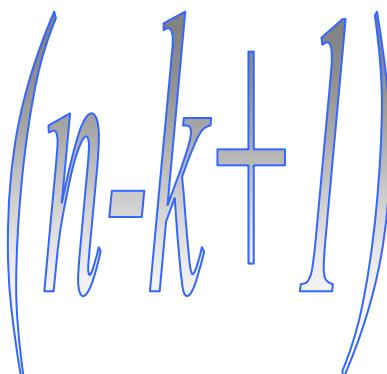



그림 9－103

제10장. 경우의 수와 자료다루기

제1절. 경우의 수

1. 경우의 수

세 지점 A, B, C를 지나는 다음과 같은 여러갈래의 길이 있다. A로부터 B를 지나 C로 가는 가능한 길을 다 찾아야 할 때가 있다.

그림 10－1

이때 A에서 B에로 가는 경우는 4가지, B에서 C에로 가는 경우는 3가지이다. 그리하여 A에서 C를 지나 B까지 가는 경우의 수는 $4\times3=12$이다.

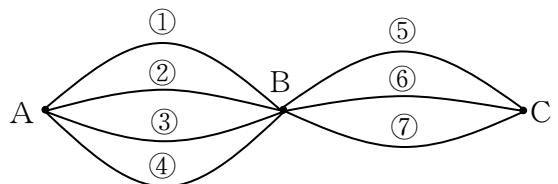
경우의 수를 찾는 문제들은 실천에서 많이 제기된다.

례 1 붉은색, 푸른색, 노란색, 흰색으로 된 4가지 기발이 있다. 서로 다른 색으로 된 2개의 기발을 차례로 꽂아서 신호를 보내려고 한다. 모두 몇가지 신호를 보낼수 있겠는가?

그림 10－2

(풀이) 첫번째로 꽂을수 있는 기발의 색갈은 붉은색, 푸른색, 노란색, 흰색의 4가지로 갈라진다. 처음에 붉은 기발을 꽂았다면 두번째로 꽂을수 있는 기발의 색갈은 다음과 같은 3가지 경우로 갈라진다.

마찬가지로 처음에 푸른색, 노란색, 흰색의 기발가운데 어느것을 꽂았는가에 따라 두번째로 꽂을수 있는 기발의 색갈은 각각 다음과 같은 3가지 경우로 갈라진다.

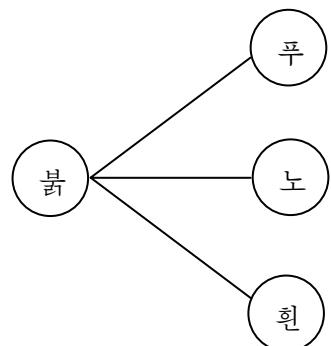
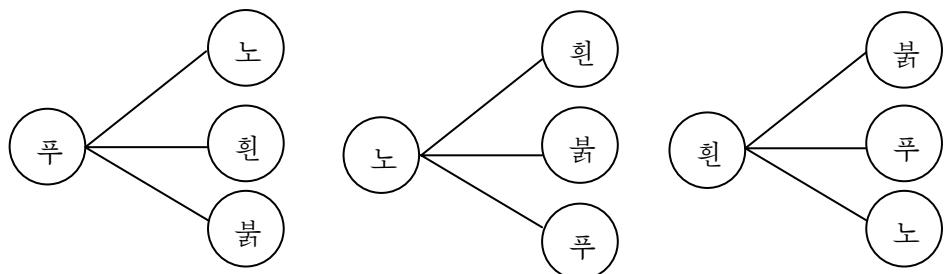



그림 10－3

이리하여 첫번째로 꽂을수 있는 기발의 색갈은 모두 4가지 경우가 가능하고 매 경우마다 두번째로 꽂을수 있는 기발의 색갈은 모두 3가지 경우가 가능하다.

그러므로 모두

$$4\times3=12$$

가지의 신호를 보낼수 있다는것을 알수 있다.

우에서와 같이 아지를 쳐가면서 경우들을 갈라나가면 빠지는 경우도 없고 겹치는 경우도 없다.

이렇게 아지를 쳐가면서 있을수 있는 경우들을 다 가르는것을 **아지치기**라고 부른다.

어떤 사실이 일어나는 경우의 수를 계산할 때 다음 법칙이 성립한다.

> 어떤 사실 A가 m가지 방법으로 일어나고 그 때 경우에 사실 B가 n가지 방법으로 일어난다고 하자. 이때 두 사실 A와 B가 동시에 일어나는 경우의 수는
>
> $$m\times n$$
>
> 가지이다.

이것을 **경우의 수에 관한 적의 법칙**이라고 부른다. 이 법칙은 일어나는 사실이 3개이상인 경우에도 성립한다.

알아보기 지점 ㄱ에서 지점 ㄴ으로 가는데 기차를 타고 갈수도 있고 뻐스를 타고 갈수도 있다. 하루에 기차는 3번, 뻐스는 2번 다닌다면 하루에 지점 ㄱ에서 지점 ㄴ으로 가는 서로 다른 방법이 몇가지 있겠는가?

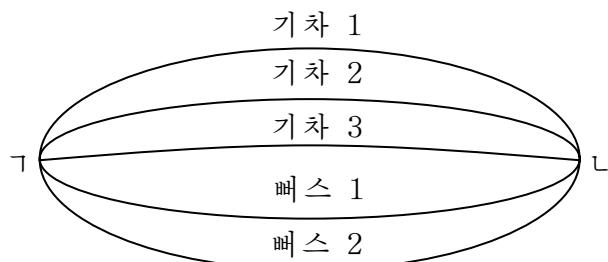



그림 10-4

어떤 사실이 일어나는 경우의 수를 계산할 때 다음 법칙이 성립한다.

이것을 **경우의 수에 관한 합의 법칙**이라고 부른다. 이 법칙은 일어나는 사실이 3개이상인 경우에도 성립한다.

경우의 수의 적의 법칙과 합의 법칙은 여러가지 사실들의 분류, 자료정리 등에서 널리 쓰인다.

례 2 지점 P에서 Q로 가는 다음과 같은 여러갈래의 길이 있다. P에서 Q로 가는 가능한 길은 모두 몇가지인가?

(풀이)

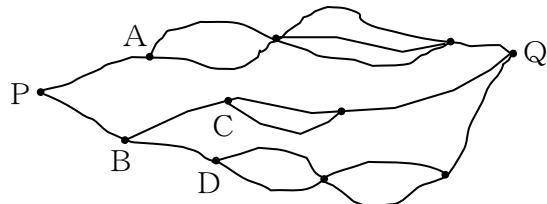



그림 10－5

P에서 Q로 A를 거쳐 갈수도 있고 B를 거쳐 갈수도 있다.

A를 거쳐 Q로 가는 길은 적의 법칙에 의해

$$2\times3\times1=6\text{(가지)}$$

B에서 Q로 C를 거쳐 갈수도 있고 D를 거쳐 갈수도 있다.

C를 거쳐 Q로 가는 길은 적의 법칙에 의해

$$2\times1=2\text{(가지)}$$

D를 거쳐 Q로 가는 길은 적의 법칙에 의해

$$2\times2\times1=4\text{(가지)}$$

그러므로 B를 거쳐 Q로 가는 길은 합의 법칙에 의해

$$2+4=6\text{(가지)}$$

따라서 P에서 Q로 가는 가능한 길은 합의 법칙에 의해

$$6+6=12\text{(가지)}$$

문 제

1. 네 지점 A, B, C, D를 지나는 다음과 같은 여러갈래의 길이 있다.

   1) A에서 B와 C를 지나 D로 가는 가능한 길을 아지치기로 따져서 갈라보아라.

   그림 10−6

   2) 가능한 경우는 모두 몇가지인가?

2. 국어, 수학, 영어, 콤퓨터 4과목을 가지고 3시간짜리 시간표를 짤수 있는대로 다 짜보아라.

3. 날씨를 다음과 같이 갈라보기로 하면 날씨를 모두 몇가지로 갈라볼수 있는가?

   1) 개였는가, 흐렸는가, 비가 오는가에 따라 가른다.

   2) 바람이 센가, 약한가에 따라 가른다.

   3) 더운가, 추운가에 따라 가른다.

4. 그림 10−7에서 A에서 B로 가는데 왼쪽에서 오른쪽으로 가기로 하면 모두 몇가지 방법이 있는가?

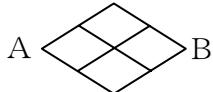
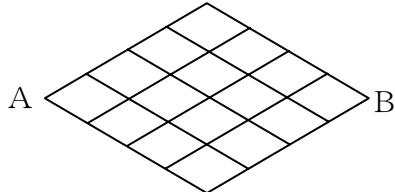



그림 10−7

2. 렬찾기

수 123, 213, 132, 231, … 은 같은 수자들로 이루어졌지만 서로 다른 수이다.

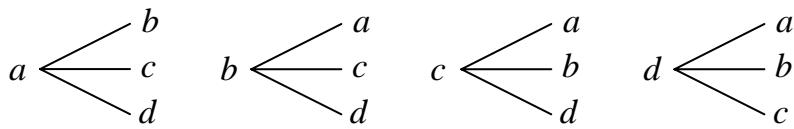
이와 같이 같은 수자로 이루어진 렬이라고 하여도 차례가 다른것은 서로 다른 렬로 본다.

실지 우리 생활에서는 렬을 다 찾아야 하는 문제들이 자주 나선다.

실례로 네 학생가운데 두 학생을 뽑아서 줄을 세우는 방법이 모두 몇가지나 되겠는가를 알아야 할 때가 있다. 이것은 4명의 학생을 각각 a, b, c, d로 표시하고 4개의 원소로 된 모임 $\{a, b, c, d\}$에서 2개의 원소를 뽑아서 만든 렬을 다 구하면 된다.

이런 렬을 **4개에서 2개 뽑은 렬**이라고 부른다.

렬의 총 수를 구하는 문제를 생각해보자.

아지치기로 표시하고 따져보면

이리하여 매 학생이 첫번째 자리에 올수 있는 경우는 모두 4가지이고 두번째 자리에 올수 있는 경우는 매 경우마다 3가지이므로 경우의 수에 관한 적의 법칙에 의하여 4개의 원소로 된 모임에서 2개의 원소를 뽑아서 만든 렬전부의 개수를 P_4^2로 표시하면

$$P_4^2=4\times3=\underbrace{4\times(4-1)}_{2\text{개}}=12$$

마찬가지로 4개의 원소에서 3개씩 뽑아 만든 렬전부의 개수는 아지치기로 따져보면

$$P_4^3=\underbrace{4\times(4-1)\times(4-2)}_{3\text{개}}$$

일반적으로 n개의 서로 다른 원소들로 이루어진 모임에서 k개씩 뽑아서 만든 렬의 개수를 P_n^k로 표시하면

$$P_n^k=\underbrace{n(n-1)\ \cdots\ (n-k+1)}_{k\text{개}}$$

례 6명의 달리기선수가 있다. 그가운데서 4명을 뽑아서 이어달리기경기에 내보내려고 한다. 달리는 순서까지 정한다면 이어달리기조를 뽑는 방법은 몇가지나 있겠는가?

(풀이) 6명가운데서 달리는 순서까지 정하여 4명을 뽑는것은 6개에서 4개를 뽑는 렬을 만드는것과 같다. 따라서 뽑는 방법의 수는

$$P_6^4=\underbrace{6\cdot(6-1)\cdot(6-2)\cdot(6-3)}_{4\text{개}}=6\cdot5\cdot4\cdot3=360$$

가지이다.

문 제

1. 5명의 대원이 4교대로 보초를 서는 방법은 몇가지 있겠는가?

2. 평양에서 신의주까지 사이에 역이 30개 있다. 떠나는 역과 닿는 역을 밝힌 차표가 몇가지나 있어야 하겠는가?

3. 서로 다른 4가지 색갈의 기발을 한줄로 띄워서 신호를 하자고 한다. 기발의 차례에 따라 신호가 달라진다고 하면 몇가지 신호를 전할수 있겠는가?

수자 1, 2, 3, 4가 있다.

1. 이 4개의 수자를 가지고 서로 다른 수자로 되여있는 세자리수를 만드는 방법과 네자리수를 만드는 방법의 수를 비교하여라.

   일반적으로 n개의 서로 다른 원소들로 이루어진 모임에서 $n-1$개씩 뽑아서 만든 렬의 개수와 n개씩 뽑아서 만든 렬의 개수는 어떤 관계에 있는가?

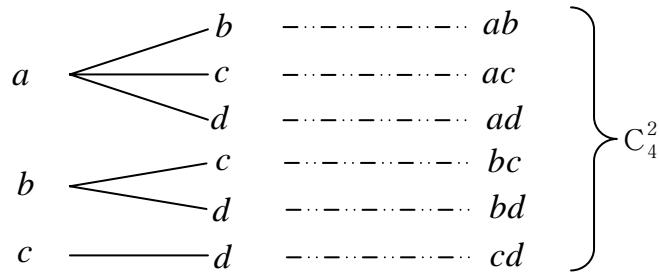
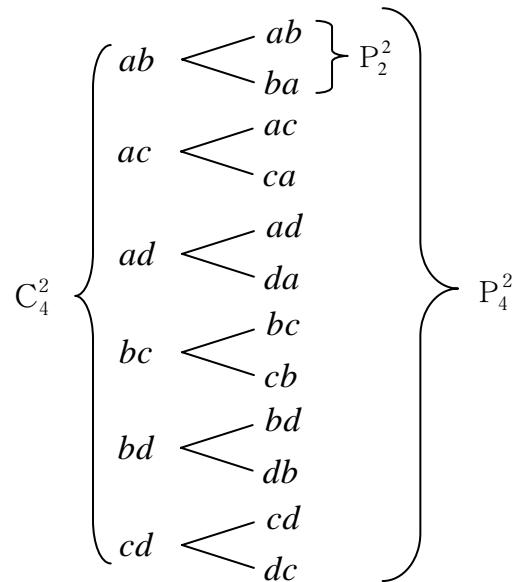
2. 같은 수자가 기껏 2개까지 들어가게 하면서 다섯자리수를 만들 때 몇개나 만들수 있는가?

3. 조묶기

네 학생가운데 두 학생씩 조를 짜는 방법이 모두 몇가지나 되겠는가를 알아야 할 때가 있다. 이것은 주어진 모임에서 2개의 원소를 뽑는 문제이므로 4명의 학생을 a, b, c, d로 표시하고 4개의 원소로 된 모임 $\{a, b, c, d\}$에서 2개의 원소로 된 부분모임을 다 구하면 된다.

이런 부분모임을 **4개에서 2개 뽑은 조**라고 부르고 그 수를 C_4^2로 표시한다.

조는 부분모임이므로 원소들이 하나라도 달라야 서로 다른 조로 된다. 아지치기로 표시하고 따져보면

a — b ······ ab
a — c ······ ac
a — d ······ ad
b — c ······ bc
b — d ······ bd
c — d ······ cd
} C_4^2

렬은 원소들이 하나라도 다르거나 차례가 다르면 서로 다른것으로 된다. 즉

그러므로 4개에서 2개 뽑은 매 조에서 차례를 다 바꾸면 4개에서 2개 뽑은 렬이 얻어진다.

그리하여 $C_4^2 \cdot P_2^2 = P_4^2$

따라서 $C_4^2 = \dfrac{P_4^2}{P_2^2} = \dfrac{\overbrace{4\cdot(4-1)}^{2\text{개}}}{2\cdot 1} = \dfrac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 6$

일반적으로 n개의 서로 다른 원소들로 이루어진 모임에서 k개의 원소를 뽑아서 만든 조의 총 수를 C_n^k로 표시하면

$$C_n^k = \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}^{k\text{개}}}{k(k-1)\cdots\cdots 2\cdot 1}$$

례 1 20개의 제품이 들어있는 통에서 3개의 제품을 꺼내여 검사하려고 한다. 3개의 제품을 꺼내는 방법은 몇가지나 되는가?

(풀이) 이것은 20개에서 3개 뽑은 조의 총 수와 같다.

그러므로 $C_{20}^3 = \frac{\overbrace{20\cdot(20-1)\cdot(20-2)}^{3\text{개}}}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{3\cdot 2\cdot 1} = 1140$

따라서 1 140가지이다.

례 2 다음것을 계산하여라.

$$C_{10}^4 - C_9^3$$

(풀이) $C_{10}^4 - C_9^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} - \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 126$

문 제

1. 다음 식에서 잘못된것을 찾아 바로 고쳐라.

   1) $C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdots\cdots(n-k)}{n!}$ 　　2) $C_n^k = \frac{k!}{n!(n-k)!}$

2. 어느 세 점도 한 직선에 놓이지 않는 5개의 점 A, B, C, D, E가 있다. 이 가운데서 3개의 점을 맺어서 3각형을 모두 몇개 만들수 있는가?

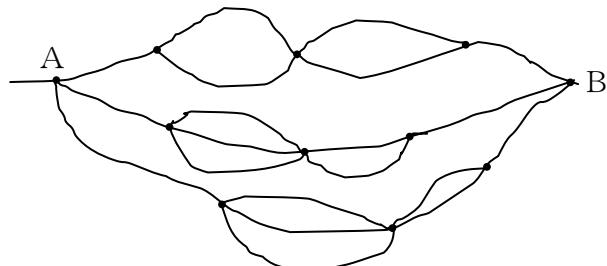
$k(k-1)\cdots 2\cdot 1$을 k차례곱이라고 부르고 $k!$로 표시한다.

렬과 조의 총 수를 구하는 규칙을 기호 《!》를 써서 공식으로 표시하여 보아라.

련 습 문 제

1. 3명의 남자선수와 4명의 녀자선수가운데서 각각 1명씩 뽑아서 남녀이어달리기 조를 짜려고 한다. 조를 짜는 방법을 아지치지로 알아보아라.
2. 그림 10－8은 어느 지방의 두 지점 A와 B사이에 놓인 길들을 표시하고있다. A에서 B에로 가는 길이 모두 몇가지 있는가?
3. 달리는 길이 네줄로 되여있는 경기장에서 8명의 선수들이 출발선을 차지하는 방법을 모두 말하여라.

그림 10－8

4. 수자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7에서 서로 다른 수자를 뽑아서 만든 다섯자리수가운데서 25의 배수는 몇개인가?
5. 모임 $\{a, b, c, d, e, f\}$에서 4개의 원소를 가지는 부분모임을 몇개나 만들수 있는가? 아지치기로 설명해보아라.
6. 어느 세 점도 한 직선에 놓이지 않는 13개의 점이 있다. 이 점들가운데서 두 점을 지나는 직선은 몇개인가?

제2절. 자료다루기

1. 자료의 가르기

알아보기 1. 다음 표는 어느 한 소년단반 학생들의 수학시험성적을 적은 것이다. 성적표와 같은 표를 **통계자료**, 그것을 갈라 고찰한것을 **가름표**라고 부른다.

번호	이름	성적
1	김효심	5
2	김명철	3
3	리옥희	5
4	박인순	4
5	박 철	4
6	서태봉	5
7	오영걸	4
8	임철호	5

(가름표)

성적	이름
최우등	(계 명)
우등	(계 명)
보통	(계 명)

1) 가름표에 따라 최우등, 우등, 보통생들을 갈라보아라.

2) 가름표에서 소년단반원들가운데 빠진 이름은 없는가? 두번 들어간 이름은 없는가?

2. 1) 1에서 20까지의 옹근수를 다음과 같은 3개의 모임으로 갈라놓아라.

(1) 3으로 완제되는 수들의 모임

(2) 3으로 나눈 나머지가 1인 수들의 모임

(3) 3으로 나눈 나머지가 2인 수들의 모임

2) 가름표를 만들어라.

3) 가름표에서 빠진 수는 없는가? 두번 들어간 수는 없는가?

가름표

나머지	0	1	2
수			

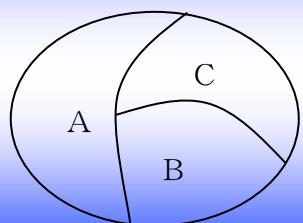
물건이나 수모임을 가를 때에는 거기에 들어있는 원소들이 하나도 빠지지 말아야 하며 또 어느것이나 꼭 한곳에만 들어가게 해야 한다.

모임 M을 조건

1) $A \cup B \cup C = M$

2) $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \varnothing$

에 맞게 가를 때 M은 모임 A, B, C로 갈라졌다고 말하고 A, B, C를 모임 M의 갈래라고 부른다.

여기서 $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $C \neq \varnothing$이다.

문 제

1. 0에서 30까지의 옹근수들을 7로 나눈 나머지에 따라 가르고 가름표를 만들어라.

1) 매 갈래에 드는 수들사이에는 어떤 관계가 있는가?

2) 매 갈래에 드는 수들을 다 표시하는 식을 세워보아라.

2. 옹근수모임을 짝수들의 모임, 홀수들의 모임으로 갈라놓으면 가름으로 되는가? 이 가름은 무엇에 의한 가름인가?

3. 3층으로 된 학교의 방들의 위치를 쉽게 알수 있게 하려면 그것을 어떻게 갈라 표식을 붙이면 좋겠는가?

2. 빈도수분포표

표 1은 어느 제1중학교 한 학급 학생들의 키를 잰 값을 적은것이다.

1. 19번 학생의 키는 얼마인가?
2. 키가 제일 큰 학생과 제일 작은 학생은 각각 몇번 학생인가?
3. 학급전체 학생들의 키가 어떻게 널려있는가?

표 1

번호	키(cm)	번호	키(cm)	번호	키(cm)
1	145	15	146	29	145
2	154	16	142	30	153
3	152	17	153	31	149
4	147	18	148	32	154
5	163	19	157	33	158
6	157	20	159	34	147
7	145	21	148	35	158
8	144	22	153	36	151
9	150	23	147	37	147
10	149	24	154	38	153
11	164	25	157	39	154
12	152	26	149	40	149
13	151	27	154		
14	152	28	143		

이 표를 보면 매 학생들의 키는 잘 알아볼수 있으나 모든 학생들의 키가 어떻게 널려있는가 하는것은 환히 안겨오지 않는다. 례를 들면 키가 150cm이상인 학생이 몇명인가? 이 학생들의 수는 150cm미만인 학생들의 수보다 많은가, 적은가 하는것 등을 하나하나 세지 않고서는 알아볼수 없다. 학생들의 키가 어떻게 널려있는가를 알자면 학생들의 키를 몇개의 구간에 따라 다음과 같이 갈라놓는것이 좋다.

1) 가장 큰 키와 가장 작은 키를 찾아서 키가 널려있는 전체 구간을 정한다.

$$[142,\ 164]$$

2) 이 구간을 어떤 길이 례컨대 5cm의 간격으로 가른다.(두 구간의 경계는 웃구간에 넣는다.)

[140, 145), [145, 150), [150, 155), [155, 160), [160, 165)

3) 키의 가름구간에 드는 학생이 각각 몇인가를 세여 다음과 같은 표를 만든다.

표 2

키구간(cm)	학생수
140～145	3
145～150	14
150～155	15
155～160	6
160～165	2
전체	40

이와 같이 자료를 정리하기 위하여 만든 구간을 **급**, 급의 너비를 **급간격**, 구간에 들어있는 자료의 개수를 그 **급의 빈도수**라고 부른다. 또한 매 급의 가운데값을 **급중심**이라고 부른다.

모든 자료들을 우에서와 같이 몇개의 급으로 가르고 매 급에 그 빈도수를 써넣은 표를 **빈도수분포표**라고 부른다.

그리고 제일 큰것에서 제일 작은것을 던 차를 **분포의 범위**라고 부른다.

빈도수분포표는 잰 값을 써넣은 표에 비해 매 학생들의 키를 알아보는데는 맞지 않지만 학급학생들의 키가 어떻게 널려있는가에 대해서는 잘 알수 있게 한다.

표를 보면 키가 145cm미만, 160cm이상 되는 학생은 몇명 안되고 150cm이상, 155cm미만인 학생이 제일 많다는것을 알수 있다.

례 학생들의 키를 잰 값을 적어넣은 표 1과 학생들의 키의 빈도수분포표(표 2)에서 분포의 범위, 급의 간격, 급중심을 구하여라.

(풀이) 분포의 범위 164－142＝22

급간격 5

급중심 142.5, 147.5, 152.5, 157.5, 162.5

문 제

1. 표 3은 40명 학생들이 너비뛰기에서 뛴 너비의 빈도수분포표이다.

표 3

너비구간(급cm)	빈도수
3.7～3.8	1
3.8～3.9	3
3.9～4.0	19
4.0～4.1	13
4.1～4.2	4
계	40

1) 학생들이 뛴 너비는 어떤 구간에 널려있는가?

2) 매 구간에 들어있는 너비를 뛴 학생수를 불러보아라.

3) 얼마만한 너비를 뛴 학생수가 가장 많고 얼마만한 너비를 뛴 학생수가 가장 적은가?

4) 매 구간에 들어있는 너비를 뛴 학생수는 각각 학급학생수의 몇 %인가?

2. 다음것은 여러차례에 걸쳐 어느 학급학생들의 여러 과목경연성적을 학생별로 종합하여 써넣은 표이다. 모두 5점을 맞은 학생의 종합성적은 100점이다.

표 4

학생	성적	학생	성적	학생	성적	학생	성적
1	72	11	63	21	58	31	86
2	83	12	88	22	53	32	100
3	57	13	79	23	86	33	82
4	84	14	93	24	43	34	68
5	59	15	86	25	80	35	96
6	90	16	59	26	89	36	64
7	68	17	86	27	79	37	70
8	55	18	71	28	76	38	53
9	96	19	62	29	99		
10	82	20	75	30	63		

이 자료를 가지고 급간격이 10점인 빈도수분포표를 만들고 급중심, 분포의 범위, 빈도수가 가장 큰 급을 말하여라. 60점미만인 학생은 몇명인가? 80점 이상인 학생은 몇명인가?

빈도수의 널림상태를 쉽게 알아보기 위하여 분포표를 도표로 표시할 때가 많다. 도표를 그리면 빈도수의 널림상태가 한눈에 안겨온다. 례를 들어 앞에서 본 학생들의 키의 빈도수분포표(표 2)를 도표로 그리자면 다음과 같이 한다.

가로축에 급을 표시하는 구간을 표시한다.

급을 표시하는 구간을 한 변으로 하고 그 구간의 빈도수만 한 길이의 선분을 다른 변으로 하는 직4각형을 그린다.(그림 10-9) 그러면 이 직4각형의 면적은 빈도수에 비례한다. 이렇게 얻어진 도형을 **빈도수분포기둥도표**라고 부른다.

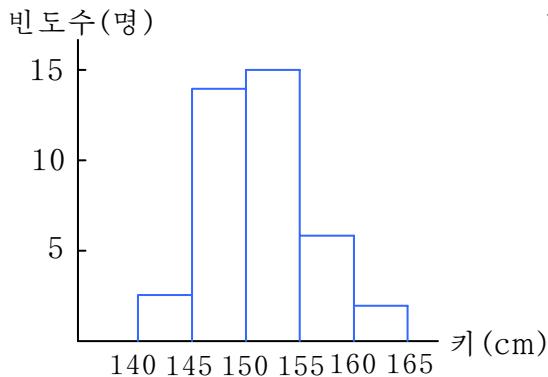
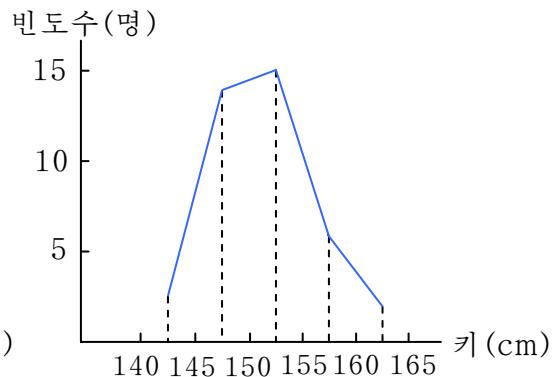



그림 10-9　　　　그림 10-10

또한 다음과 같이 할수도 있다.

자리표평면에 매 급의 급중심과 그 급의 빈도수를 각각 가로 및 세로자리표로 가지는 점들을 찍는다.

이 점들을 차례로 선분으로 맺는다.

이렇게 얻어진 도형을 **빈도수분포절선도표**라고 부른다.(그림 10-10)

문 제

1. 너비뛰기 빈도수분포표(표 3)를 보고 빈도수분포기둥도표와 빈도수분포절선도표를 그려라.
2. 앞에서 만든 여러 과목경연성적의 빈도수분포표(표 4)를 보고 빈도수분포기둥도표와 빈도수분포절선도표를 그려라.
3. 어느 나무모판에서 어린 나무싹의 키를 재여 그림과 같은 빈도수분포절선도표를 얻었다.(그림 10-11)
   1) 나무싹의 키는 어느 구간에 널려있는가?
   2) 키가 얼마인 나무싹이 가장 많고 키가 얼마인 나무싹이 가장 적은가?
   3) 키에 따라 나무싹의 그루수가 어떻게 변하는가?

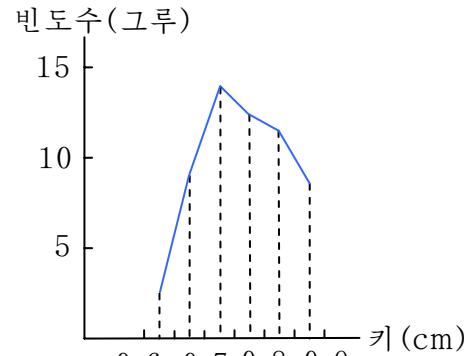



그림 10-11

급이나 자료수가 많은 경우에 빈도수분포표만 보고서는 례를 들어 키가 150cm미만은 몇명인가, 160cm이상은 몇명인가 하는것을 인차 알아내기 힘들다. 그리하여 빈도수의 루적(자료의 값이 커지는데 따라 그 빈도수들을 더하여 얻은 값)을 생각하면 편리할 때가 많다.

첫째 급으로부터 어떤 급까지의 빈도수를 다 더한것을 그 급의 **루적빈도수**라고 부르고 루적빈도수를 써넣은 빈도수분포표를 **루적빈도수분포표**라고 부른다.

다음 표는 어느 한 제1중학교 남학생 40명의 키에 대한 빈도수분포표이다.

표 5

급 (키구간(cm))	빈도수 (학생수(명))
144～148	1
148～152	2
152～156	5
156～160	11
160～164	14
164～168	4
168～172	2
172～176	1
계	40

이것을 보고 루적빈도수분포표를 써보면 다음과 같다.

표 6

급 (키구간(cm))	루적빈도수 (학생수(명))
144～148	1
148～152	3
152～156	8
156～160	19
160～164	33
164～168	37
168～172	39
172～176	40

문 제

1. 표 6을 보고 다음 물음에 대답하여라.
   1) 키가 144cm미만인 학생은 몇명인가?
   2) 키가 164cm미만인 학생은 몇명인가?
   3) 키가 168cm이상인 학생은 몇명인가?
2. 표 4의 루적빈도수분포표를 만들어라.

조사한 자료를 다룰 때 빈도수의 크기뿐아니라 매 급의 빈도수의 전체 빈도수에 대한 비를 보아야 할 때가 많다.

한 급의 빈도수를 전체 빈도수의 합으로 나눈 상을 그 **급의 빈도률**(상대빈도수)이라고 부른다.

빈도수분포표에 빈도수대신에 그 빈도률을 적어넣은것을 **빈도률분포표**라고 부른다.

표 5에서 매 급의 빈도률을 0.001의 자리까지 구하면 다음과 같은 빈도률분포표를 얻는다.

표 7

급(키구간(cm))	빈도수(학생수(명))	빈도률
144～148	1	0.025
148～152	2	0.050
152～156	5	0.125
156～160	11	0.275
160～164	14	0.350
164～168	4	0.100
168～172	2	0.050
172～176	1	0.025
계	40	1.000

문 제

1. 표 2와 표 3에 대한 빈도률을 각각 구하고 빈도률분포표를 만들어라.
2. 표 8에 대한 빈도률분포표를 만들어라.

표 8

급 (닭알의 질량(g))	빈도수(알)
45～50	6
50～55	39
55～60	125
60～65	193
65～70	110
70～75	27
계	500

3. 대표값

어느 학생의 키가 큰 편인가, 작은 편인가를 알려면 학급학생들의 키를 대표할만 한 수와 비교하여야 한다. 또한 어느 두 학급 학생들의 키를 전체로 비교하려고 할 때도 개별적학생들의 키를 비교하는것보다 학급학생 전체의 키를 대표할만 한 수를 가지고 비교해야 한다.

자료의 값 전체를 대표하는 수를 **대표값**이라고 부른다.

대표값으로는 평균값, 최빈값을 쓸수 있다.

어떤 대상을 여러번 재여 잰 값을 얻으면 보통 그것들의 총 합을 잰 회수로 나눈 평균을 잡아 그것을 얻으려는 값으로 본다.

자료 a값들의 총 합을 자료의 개수로 나눈 상을 그 자료들의 **평균값**이라고 부른다. 즉 n개의 값 a_1, a_2, …, a_n의 평균값을 $\bar{a}$라고 하면

$$\bar{a}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

수들의 평균값이 $\bar{a}$이라는것은 그 수들이 모두 같다고 하면 그 수들을 다 $\bar{a}$라고 볼수 있다는것을 의미한다.

례 1 다음 표는 어느해 평양지방의 이른봄 10일간의 최고기온을 조사한 자료이다.

날자(일)	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
최고기온(℃)	10	12	6	10	12	15	10	6	9	13

이 자료의 평균값을 구하여라.

(풀이) 평균값 $=\frac{10+12+6+10+12+15+10+6+9+13}{10}$

$$=\frac{103}{10}=10.3$$

즉 10일간의 평균최고기온은 10.3℃이다.

평균값을 간단히 구하는 편리한 방법을 생각해보자.

우의 례에서 눈짐작으로 평균값에 가깝다고 생각되는 수 10을 잡는다. 이와 같이 잡은 수를 **가평균**이라고 부른다.

이제 매 값에서 가평균을 던 차들의 평균값을 구하고 그것에 가평균을 더하면 구하려는 평균값이 얻어진다.

날자(일)	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
최고기온(℃)	10	12	6	10	12	15	10	6	9	13
차 (최고기온－가평균)	0	＋2	－4	0	＋2	＋5	0	－4	－1	＋3

$$평균값 = 10 + \frac{0+2-4+0+2+5+0-4-1+3}{10}$$

$$= 10 + \frac{3}{10} = 10.3(℃)$$

이와 같이 평균값을 구하는 방법을 **가평균에 의한 방법**이라고 부른다.

문 제

1. 례 1에서 가평균을 11로 잡고 평균값을 구하여라. 평균값은 가평균을 잡는 방법에 따라 달라지는가?
2. 다음 값들은 한 학생이 실험실에서 같은 길이를 8번 재여서 얻은 값이다.

잰 차례	1	2	3	4	5	6	7	8
잰 값(cm)	11.9	12.0	11.7	11.8	12.1	11.9	12.0	12.1

1) 자료의 값의 총합을 자료의 개수로 나눈 평균값을 계산하여라.
2) 118을 가평균으로 잡고 평균값을 계산하여라.
3) 119를 가평균으로 잡고 평균값을 계산하여라.
4) 얻은 세 평균값을 비교하여라. 평균값이 구하는 방법에 따라 달라지는가?

자료의 개수가 많을 때에는 빈도수분포표를 써서 평균값을 구하는것이 편리하다.

남학생 40명의 키에 대한 빈도수분포표(표 5)를 써서 학생들의 평균키를 구해보자.

빈도수분포표의 매 급 례를 들어 [148, 152)에 들어있는 2명의 학생의 키는 구체적으로 알수 없다. 그러므로 이 구간의 가운데값 즉 급중심 150cm를 그들의 키로 보고 계산한다.

이제 매 급의 급중심을 구하여 매 급을 급중심으로 바꾸고 급중심과 그 빈도수와의 적을 구한다.

급	급중심	빈도수	급중심×빈도수
144～148	146	1	146×1＝146
148～152	150	2	150×2＝300
152～156	154	5	154×5＝770
156～160	158	11	158×11＝1738
160～164	162	14	172×14＝2268
164～168	166	4	166×4＝664
168～172	170	2	170×2＝340
172～176	174	1	174×1＝174
계		40	6 400

매 급중심과 그 빈도수와의 적들의 합 6 400을 전체 빈도수의 합 40으로 나누면 구하려는 평균값이 얻어진다.

$$평균값=\frac{6400}{40}=160$$

즉 학생들의 평균키는 160cm이다.

실지 계산에서는 가평균의 방법을 쓰는것이 편리하다.

162를 가평균으로 잡아 우에서 구한 평균키를 계산하면 다음과 같다.

매 급에서 급중심과 가평균과의 차를 구하고 이 차와 그 빈도수와의 적들의 평균값을 구한 다음 그것에 가평균을 더하면 구하려는 평균값이 얻어진다.

급중심	차 (급중심－가평균)	빈도수	차×빈도수
146	－16	1	－16×1＝－16
150	－12	2	－12×2＝－24
154	－8	5	－8×5＝－40
158	－4	11	－4×11＝－44
162	0	14	0×14＝0
166	＋4	4	4×4＝＋16
170	＋8	2	8×2＝＋16
174	＋12	1	12×1＝＋12
계		40	－80

$$평균키=162+\frac{-80}{40}=160(cm)$$

가평균으로는 보통 빈도수가 제일 큰 급중심을 잡는다.

문 제

1. 빈도수분포표에 의하여 평균값을 구할 때 급중심을 쓰지 않고 매 급의 평균값을 쓰면 자료의 값의 총합을 그 개수로 나눈 평균값과 일치한 평균값이 얻어진다. 왜 그런가?

2. 너비뛰기에서 학생들이 뛴 너비의 빈도수분포표(표 3)를 보고 뛴 너비의 평균값을 구하여라.

3. 다음 표를 보고 어느해 평양과 해주의 년평균기온의 차이를 구하여라.(단위 ℃)

월 / 지방	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
평양	−8.0	−4.5	1.8	9.7	16.2	20.6	24.2	24.4	18.9	11.8	4.1	−4.2
해주	−4.8	−2.5	2.9	10.1	15.7	19.9	23.6	24.7	19.9	13.5	6.3	−1.2

다음 표는 한 학생이 자기 키를 여러번 잰 자료이다.

잰 차례	1	2	3	4	5	6	7	8
키(cm)	157.8	158.0	158.0	158.1	158.0	157.9	158.1	158.0

표를 보면 잰 값이 158.0인 경우가 가장 많다는것을 알수 있다. 그러므로 학생의 키를 158.0cm라고 보는것이 좋다.

수집한 자료에서 가장 많이 나타나는 값을 그 자료의 대표값으로 쓸수 있다. 이러한 대표값을 **최빈값**이라고 부른다. 자료들이 빈도수분포표로 주어졌을 때는 빈도수가 가장 큰 급의 급중심이 최빈값으로 된다.

례 2 남학생 40명의 키에 대한 빈도수분포표(표 5)에서 가장 큰 빈도수는 14이고 그에 대한 급은 160∼164이다. 따라서 최빈값은 이 급의 급중심

$$\frac{160+164}{2}=162(\text{cm})$$

와 같다.

례 3 한 작업반원들이 깎은 부분품의 개수의 빈도수분포표가 다음과 같다.

급 (부분품의 개수)	3월 31일의 빈도수(명)	4월 30일의 빈도수(명)
20∼30	3	0
30∼40	4	2
40∼50	17	3
50∼60	8	18
60∼70	0	9
계	32명	32명

작업반원들이 3월 31일에 부분품을 깎은 개수와 한달이 지나서 하루에 깎은 개수를 비교하여라.

(풀이) 1) 최빈값을 대표값으로 잡는 경우

3월 31일에 깎은 개수의 빈도수분포표에서 빈도수가 가장 큰 구간은 [40, 50)이다.

한달이 지나서 하루에 깎은 개수의 빈도수분포표에서 빈도수가 가장 큰 구간은 [50, 60)이다. 따라서 최빈값은 45와 55이다. 최빈값들을 비교하면

$$55-45=10$$

이리하여 작업반원들이 한달후에는 전보다 하루에 대략 10개씩 더 깎는것으로 볼수 있다.

2) 평균값을 대표값으로 잡는 경우

가평균의 방법이 편리하므로 3월 31일의 빈도수분포표에서 45를 가평균으로 잡고 평균값을 계산하면

$$45+\frac{1}{32}\times(-20\times3-10\times4+0\times17+10\times8)$$

$$=45+\frac{-20}{32}=45-0.625=44.375$$

4월 30일의 빈도수분포표에서 55를 가평균으로 잡고 평균값을 계산하면

$$55+\frac{1}{32}\times(-20\times2-10\times3+0\times18+10\times9)$$

$$=55+\frac{20}{32}=55+0.625=55.625$$

이 평균값의 차는

$$55.625-44.375=11.25\approx11$$

이리하여 작업반원들이 한달후에는 전달보다 평균 11개씩 더 깎는다고 볼수 있다.

문 제

1. 이삭당 강냉이그람수에 대한 빈도수분포표(표 9)를 보고 대표값(평균값, 최빈값)을 구하여라.

표 9

급 (이삭당 강냉이그람수 구간)	빈도수
120～130	3
130～140	7
140～150	25
150～160	49
160～170	12
170～200	4
계	100이삭

2. 아래의 값들은 어떤 강의 너비를 측량기로 여러번 재여 얻은 값들이다.(단위는 m)

628, 630, 628, 631, 635, 627, 630, 628, 631, 635, 633, 633, 631, 633, 632, 630

강의 너비를 얼마로 보아야 하겠는가?

자기 학급의 학생들의 키를 모두 재고 다음과 같은것을 구해보아라.

1) 빈도수분포표

2) 빈도수분포기둥도표와 절선도표

3) 빈도률분포표

4) 평균값과 최빈값

련 습 문 제

1. 표 10은 어느 제1중학교 2학년 한 분단에서 한주일동안에 읽은 책의 페지수를 총화한것이다. 50페지의 급간격으로 빈도수분포표를 만들고 빈도수분포기둥도표, 빈도수분포절선도표를 그려라.

표 10

학 생 (출석부번호)	페지수	학 생 (출석부번호)	페지수	학 생 (출석부번호)	페지수
1	495	11	445	21	355
2	422	12	335	22	417
3	300	13	357	23	393
4	442	14	493	24	474
5	483	15	363	25	375
6	342	16	435	26	366
7	413	17	360	27	440
8	362	18	417	28	384
9	409	19	395	29	336
10	290	20	370	30	384

2. 표 9의 빈도수분포표를 보고 물음에 대답하여라.
   1) 매 이삭의 강냉이그람수는 어느 구간에 널려있는가?
   2) 매 구간에 들어있는 그람수만큼씩 거둔 강냉이이삭수를 불러보아라.
   3) 어떤 구간에 든 강냉이이삭수가 가장 많은가?
   4) 매 구간에 들어있는 강냉이이삭수는 전체 이삭수의 몇%인가?
3. 표 11은 어떤 알곡 1 000알당 질량의 빈도수분포표이다.
   1) 빈도수분포기둥그라프를 그려라.
   2) 빈도수분포절선그라프를 그려라.
   3) 대표값(평균값, 최빈값)을 구하여라.

표 11

급 (질량구간(g))	빈도수
25～26	4
26～27	16
27～28	36
28～29	67
29～30	15
30～31	12
계	150

4. 다음 표는 어떤 알곡 한이삭에 달린 알수의 빈도수분포표이다.

급 (알수구간(알))	빈도수
110～120	3
120～130	9
130～140	28
140～150	59
150～160	24
160～170	12
170～180	7
180～190	4
190～200	4
계	150

1) 빈도수분포기둥도표를 그려라.

2) 대표값(평균값, 최빈값)을 구하여라.

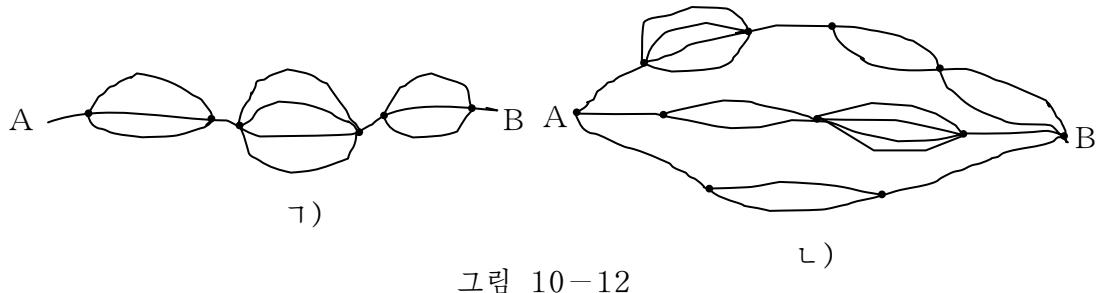
5. 다음 표는 5명의 선반공들이 매월 가공한 부속품수를 써넣은것이다.

월 / 이름	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
김충혁	15	14	17	20	17	17	19	19	20	20	21	23
리철호	13	16	16	15	16	18	19	18	18	21	20	20
김대홍	11	15	14	19	15	17	16	18	17	18	19	21
강선군	12	14	7	19	16	13	19	19	18	17	21	20
최일진	14	15	15	17	17	19	18	17	17	19	20	29

표를 보고 매 선반공들이 월평균 생산한 부속품수를 구하여라. 선반공이 월평균 생산한 부속품수가 큰 순위에 따라 그 이름을 써라.

복 습 문 제

1. 그림 10－12에서 A에서 B에로 가는데 몇가지 가능한 길이 있는가?

그림 10－12

2. 서로 다른 수자로 되여있는 네자리수가운데서 짝수와 홀수가 번갈아나오는것은 몇개 만들수 있는가?

3. 1부터 9까지 수자를 써서 같은 수자가 거듭 들어가지 않는 네자리 홀수를 몇개 만들수 있는가?

4. 최우등생 10명과 우등생 6명가운데서 각각 3명씩 뽑는 방법은 몇가지 있는가?

5. 10명의 학생을 3개의 호실 A, B, C에 배치하려고 한다. A에 4명, B, C에 각각 3명씩 배치하는 방법은 몇가지 있는가?

6. －32에서 24까지의 옹근수들을 12로 나눈 나머지에 따라 가르고 가름표를 만들어라.

7. 다음 표는 어느 지방의 4, 5월(30년간)의 평균기온을 조사한 자료이다.

월 / 년	4	5	월 / 년	4	5	월 / 년	4	5
1976	10.7	15.2	1986	8.8	15.2	1996	9.8	16.9
1977	9.2	15.5	1987	9.6	17.2	1997	10.7	17.9
1978	11.9	15.6	1988	9.5	15.9	1998	10.6	16.5
1979	9.0	16.8	1989	9.4	17.5	1999	9.3	15.6
1980	12.4	17.6	1990	9.5	15.8	2000	10.6	17.7
1981	8.5	16.2	1991	10.6	16.4	2001	9.9	16.0
1982	9.9	17.9	1992	9.1	17.0	2002	9.7	15.3
1983	9.5	16.5	1993	10.1	15.7	2003	8.2	14.2
1984	11.1	16.5	1994	11.7	17.6	2004	10.2	16.2
1985	9.6	16.4	1995	8.2	16.3	2005	9.8	15.3

1) 0.5℃의 간격으로 빈도수분포표와 빈도수분포절선도표를 그리고 빈도수의 널림상태를 말하여라.

2) 월별 대표값을 구하고 비교하여라.

8. 다음 표를 보고 A, B, C, D지방의 년평균기온을 구하고 그것들을 비교하여라.(단위 ℃)

월 / 지방	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	−7.4	−4.3	2.3	9.9	15.3	20.5	24.5	24.6	18.5	11.5	4.5	−2.5
B	−8.6	−5.2	1.2	8.9	15.4	20.1	23.7	23.7	18.1	10.9	2.7	−6.3
C	−8.6	−8.4	−0.7	8.6	15.1	19.7	23.4	22.6	16.2	9.2	−2.0	−7.9
D	−9.5	−6.5	−9.3	0.8	7.7	11.7	15.9	15.6	8.6	1.4	−2.6	−9.8

9. 다음의 표는 한 과수농장에서 어떤 과일나무묘목 200그루의 키를 재여 얻은 자료를 정리한것이다.

급(cm)	빈도수(묘목수)
27.5～29.5	3
29.5～31.5	10
31.5～33.5	23
33.5～35.5	47
35.5～37.5	49
37.5～39.5	40
39.5～41.5	26
41.5～43.5	2
계	200

1) 루적빈도수분포표를 만들어라.

2) 평균값을 구하여라.

10. 다음것은 한 학생이 자기 고향마을의 7월과 8월의 바람방향을 하루에 6번씩 재여 빈도수분포표로 정리한것이다.

바람방향	7월빈도수	8월빈도수
바람없음	35	44
북～북동	6	8
북동～동	23	28
동～동남	32	33
동남～남	21	14
남～남서	24	15
남서～서	15	13
서～서북	14	15
서북～북	16	16
계	186번	186번

빈도수기둥도표를 그리고 널림상태를 비교하여라.

11. 자기 학급학생들의 수학성적의 빈도수분포표를 각각 만들어라. 다음 빈도수분포기둥도표를 그리고 널림상태를 비교하여라.

찾아보기

각뿔대 (224)	Frustum of a pyramid	Усечённая пирамида
거꿀비례 (40)	Inverse proportionality	Обратная пропорциональность
구 (97, 227)	Ball	Шар
그라프 (60)	Graph	Граф(График)
다면체 (219)	Polyhedron	Полиэдр
빈도수분포 (263)	Frequency distribution	Распределение частот
도표 (266)	Eiagram	Диаграмма
련립1차방정식(107)	System of linear equations	Система линейных уравнений
련립1차안갈기식(123)	System of linear inequalities	Система линейных неравенств
면적 (135)	Area	Площадь
모임 (5)	Set	Множество
모임의 사귐 (18)	Intersection of sets	Пересечечение множеств
모임의 합 (20)	Union of sets	Объединечное множество
무한모임 (11)	Infinit set	Бесконечное множество
비 (26)	Ratio	Отношение
비례 (31)	Proportionality	Пропорциональность
자리표 (47)	Coordinate	Координата
체적 (232)	Volume	Объём
평균값 (269)	Average	Среднее
풀이 (102)	Solution	Решение
회전체 (225)	Rotator	Тело вращения(Ротатор)
유한모임 (11)	Finit set	Конечное множество
인수분해 (170)	Factorization	Факторизация
1차방정식 (63)	Linear equation	Линейное уравнение
1차안갈기식 (67)	Linear inequality	Линейное неравенство
원 (73)	Circle	Круг
원기둥 (95)	Cylinder	Круговый цилиндр
원뿔 (226)	Cone	Конус
원뿔대 (226)	Frustum of a cone	Усечённый конус

편 찬 위 원 회

김용진, 김영인, 한성일, 강영백, 리호용,

김창선, 류해동, 조룡휘

총편집 교수, 박사 류해동

수 학(제1중학교 제2학년용)

2판

집 필 교수 박사 서기영, 교수 박사 류해동, 교수 박사 허달윤, 부교수 남호석, 부교수 홍성구, 조룡휘, 오영일, 리복화, 박무환

심 사 심의위원회

편집 및 콤퓨터편성 최영국

장 정 류명심 교 정 리정애

낸 곳 교육도서출판사

인쇄소 평양고등교육도서인쇄공장

1판발행 주체96(2007)년 1월 20일

2판인쇄 주체101(2012)년 3월 31일 2판발행 주체101(2012)년 4월 11일

교-11-보-454 값 70 원